

S.N.C.B
Enseignement Professionnel

Mécanique élémentaire

Cours 1203

I/II

Leçons 1 à 20



C O U R S 1 2 0 3

Mécanique élémentaire.

Table des matières.

<u>Matière.</u>	<u>Leçons.</u>
<u>1ère partie : Cinématique.</u>	
<u>Chapitre 1</u> : Généralités	1ère leçon
<u>Chapitre 2</u> : Le mouvement uniforme.	1ère leçon 2e leçon
<u>Chapitre 3</u> : Le mouvement varié.	2e leçon 3e leçon
<u>Chapitre 4</u> : Le mouvement uniformément accéléré	3e leçon
<u>Chapitre 5</u> : Le mouvement uniformément retardé	4e leçon
<u>Chapitre 6</u> : Chute des corps	4e leçon
<u>Chapitre 7</u> : Applications industrielles de la cinématique.	5e leçon 6e leçon 7e leçon 8e leçon 9e leçon
<u>2ème partie : La statique.</u>	
<u>Chapitre 1</u> : Inertie des forces	10e leçon
<u>Chapitre 2</u> : Principes de base	11e leçon
<u>Chapitre 3</u> : Etude des forces concourantes.	12e leçon 13e leçon
<u>Chapitre 4</u> : Etude des forces parallèles	14e leçon 15e leçon
<u>Chapitre 5</u> : Moment des forces	16e leçon 17e leçon 18e leçon 19e leçon
<u>Chapitre 6</u> : Etude de la pesanteur. Centre de gravité.	20e leçon 21e leçon

3ème partie - La dynamique.

<u>Chapitre 1</u> : Les forces de frottement	22e leçon 23e leçon
<u>Chapitre 2</u> : Le travail	24e leçon
<u>Chapitre 3</u> : La puissance	25e leçon
<u>Chapitre 4</u> : La masse	25e leçon
<u>Chapitre 5</u> : La force centrifuge	26e leçon
<u>Chapitre 6</u> : L'énergie	26e leçon
<u>Chapitre 7</u> : Les machines simples	27e leçon 28e leçon 29e leçon 30e leçon

SOCIÉTÉ NATIONALE DES CHEMINS DE FER BELGES.

Enseignement professionnel.

COURS 1203.

MECANIQUE ÉLÉMENTAIRE.

e leçon.

1ère Partie - La cinématique.

Chapitre 1. - Généralités.

1.1. La cinématique.

La cinématique est l'étude des mouvements.

1.2. Le mouvement - Définition.

Observez un train en marche. Il se déplace, il occupe successivement des positions différentes. On dit qu'il est en mouvement.

Le mouvement est l'état d'un corps qui se déplace.

Remarque: Un corps qui se déplace est appelé mobile.

1.3. Ce qui caractérise un mouvement.

1.3.1. La trajectoire. Le train roule sur la voie. La ligne que le train parcourt est la trajectoire.

Quand la voie est droite, la trajectoire est rectiligne.

Quand la voie décrit une courbe en arc de cercle, on dit que la trajectoire est circulaire.

Quand la voie serpente irrégulièrement, monte et descend, on dit que la trajectoire est quelconque.

Autre comparaison: La balle d'un fusil trace dans l'espace une ligne: cette ligne est la trajectoire de la balle.

1ère caractéristique du mouvement.

La trajectoire: ligne parcourue par un corps qui se déplace.

1.3.2. Le chemin ou l'espace parcouru.

Le train part d'une gare pour aboutir à une autre.

La gare de départ est l'origine du mouvement. Dans cette gare, le train est à l'arrêt et se met en mouvement.

La gare d'arrivée est la fin du mouvement. Dans cette gare, le train arrive en roulant, en mouvement, s'immobilise et reprend l'état de repos.

La distance entre les deux gares est appelée : chemin parcouru ou espace parcouru.

Unité de chemin parcouru : En mécanique, on choisit comme unité le mètre (m); multiple : le kilomètre (km); sous-multiples : le centimètre (cm), le millimètre (mm).

Remarque.

Nous donnons ci-après un tableau des unités légales les plus couramment utilisées.

Grandeurs	Unités	Multiples et sous-multiples. Autres unités.	Symboles
Longueur	Mètre	Kilomètre Centimètre	m km cm
Surface	Mètre carré	Centimètre carré	m ² cm ²
Volume	Mètre cube	décimètre cube litre	m ³ dm ³ l
Angle plan	Radian	Degré Minute Seconde Grade Tour	rad ... ° ... ' " ... g tr
Temps	seconde	Minute Heure	s min h
Masse	Kilogramme	Tonne Gramme	kg t g
Force, poids	Newton		N

Pression	Pascal		Pa
Travail	Joule		J
		Kilowattheure	kWh
Puissance	Watt		W
Vitesse	$\frac{\text{Mètre}}{\text{Seconde}}$		m/s
		$\frac{\text{Kilomètre}}{\text{Heure}}$	km/h

1.3.3. Le temps.

Lorsque nous projetons un voyage en chemin de fer, nous consultons un indicateur. Nous regardons l'heure de départ et l'heure d'arrivée des trains que nous choisissons. Par une simple soustraction, nous déduisons les temps de parcours des trains.

2ème caractéristique du mouvement.

Le temps pendant lequel le mobile se déplace.

Unité de temps : La seconde (s)

Multiple : la minute (min) = 60 s.

1'heure (h) = 60 min = 3 600 s.

Chapitre 2. Le mouvement uniforme.

2.1. Définition.

Supposez que vous soyez disposé à faire une promenade de 4 heures à pied.

L'allure de votre marche est telle que l'espace parcouru par heure sera de 4 km. En d'autres mots : 4 km : heure.

Cela signifie :

Pendant la 1ère heure (temps = 1 heure)	l'espace parcouru
" " 2ème " (" = ")	sera 4 km; "
" " 3ème " (" = ")	sera 4 km; "
" " 4ème " (" = ")	sera 4 km; "
	sera 4 km.

Nous constatons que le déplacement par heure reste le même pendant toute la durée du mouvement.

Un mouvement ainsi caractérisé est dit uniforme.

Pendant chaque heure, nous avons parcouru un espace de 4 km. Cela signifie que :

Les espaces parcourus en des temps égaux sont égaux.

2.2. Vitesse.

Le chemin parcouru pendant 1 heure, c'est-à-dire pendant l'unité de temps ou un multiple de cette unité est appelé vitesse.

Unités de vitesse.

unité de vitesse = $\frac{\text{unité d'espace}}{\text{unité de temps}}$ = mètre : seconde (m/s)

multiple: mètre : minute (m:min)
 kilomètre : heure (km:h)

$$V \text{ en km:h} = v \text{ en m:s} \times \frac{3600}{1000}$$

$$V \text{ en km:h} = v \text{ en m:s} \times 3,6$$

2.3.

Après 1 heure (temps = 1 heure), l'espace parcouru sera: 4 km;

" 2 heures (temps = 2 heures), l'espace parcouru sera 4×2 km = 8 km;

" 3 " (" = 3 "), l'espace parcouru sera 4×3 km = 12 km;

" 4 " (" = 4 "), l'espace parcouru sera 4×4 km = 16 km;

" 5 " (" = 5 "); l'espace parcouru sera 4×5 km = 20 km;

.....
 Après t heures (temps = t heures), l'espace parcouru sera $4 \times t$ km

Appelons e cet espace $e = 4 \times t$

4 est la vitesse, appelons v cette vitesse:

$$e = v \times t$$

Dans le mouvement uniforme, l'espace est égal à la vitesse multipliée par le temps.

2.4. Remarque:

De $e = v \times t$, nous déduisons $v = \frac{e}{t}$ et $t = \frac{e}{v}$

2.5. Conclusion.

Si nous connaissons deux éléments du mouvement, nous pouvons rechercher le troisième.

2.6. Représentation graphique de la vitesse dans le mouvement uniforme.

2.6.1. Généralités.

a) Echelle.

Comment représenter sur un papier, une vitesse, un temps, un espace parcouru. Ouvrons une carte routière. Nous savons comment calculer la distance réelle qui sépare deux localités de la carte.

Dans un coin de la carte figure l'échelle des distances. Exemple: 1 cm de la carte = 2 km réels. On mesure entre les 2 points représentant les 2 localités de la carte: 10 cm. On en déduit la distance réelle : $10 \times 2 = 20$ Km.

Pour représenter les vitesses, les espaces et les temps qui caractérisent les mouvements, nous choisissons aussi une échelle.

Exemple: 1 km: heure est représenté par 1 cm.
 4 km: heure sont représentés par 4 cm = 4 cm
 1 heure est représentée par 2 cm
 5 heures sont représentées par $5 \times 2 = 10$ cm.

b) Axes perpendiculaires.

Traçons deux lignes droites perpendiculaires OX et OY (figure 1). Deux droites semblables sont appelées axes.

Le point de rencontre (intersection) de OX et OY s'appelle le point zéro ou l'origine. C'est à partir de ce point que nous porterons, sur OX et sur OY , les valeurs dont nous allons parler.

2.6.2. Représentation des vitesses du mouvement uniforme.

Sur OX on porte les temps 1, 2, 3, 4, et 5 heures, ce qui donne à l'échelle de 1 heure = 2 cm respectivement 2, 4, 6, 8 et 10 cm.

En chacun des points ainsi déterminés, on élève des verticales perpendiculaires à OX et égales aux longueurs représentant les vitesses. On a ainsi les points B, C, D, E, F. On joint tous ces points, la ligne obtenue représente les vitesses.

La ligne qui représente les vitesses du mouvement uniforme est une ligne droite horizontale.

2.6.3. Représentation des espaces.

1ère méthode. L'espace parcouru est égal au produit de la vitesse par le temps: $v \times t$. La surface d'un rectangle est égal à sa base \times sa hauteur: $b \times h$. En adoptant une base = t et une hauteur v , l'espace $v \times t$ serait représenté par la surface du rectangle OAFG de la figure 1.

2ème méthode. On trace deux axes OX & OY perpendiculaires entre eux (fig. 2).

Sur OX , nous portons les temps à l'échelle. Nous avons ainsi les points 1, 2, 3, 4 et 5 heures.

En chacun des points ainsi déterminés, on élève des verticales égales aux longueurs représentant les espaces correspondant aux temps 0, 1, 2, 3, 4 et 5 h, soit respectivement 0, 4, 8, 12, 16 et 20 km.

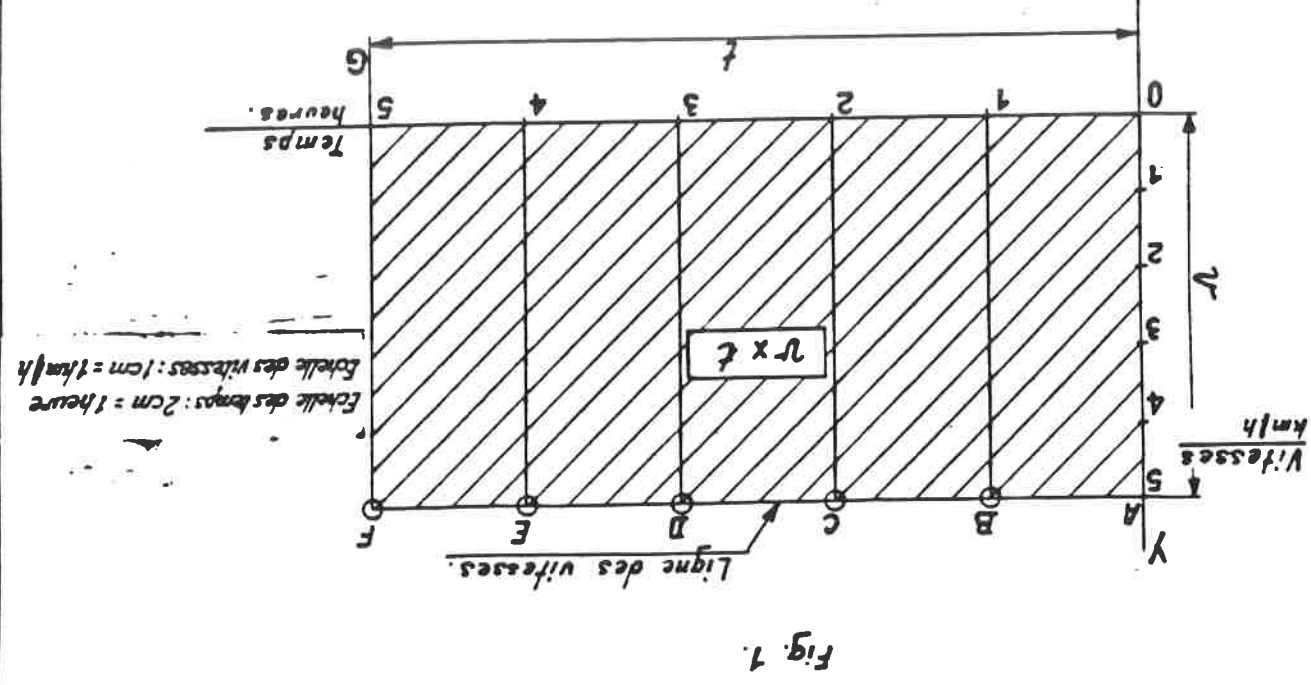
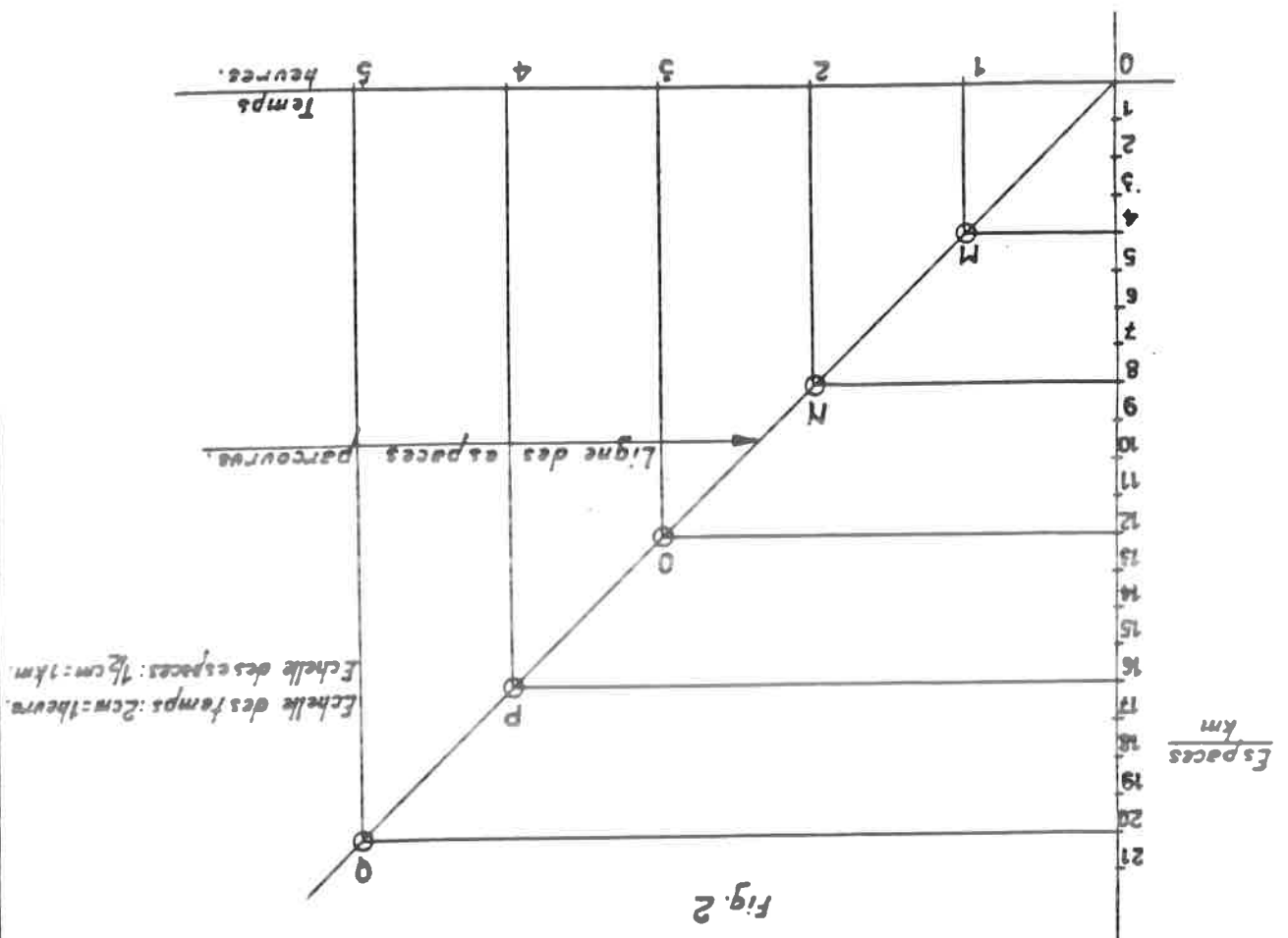
Nous avons ainsi les points O, M, N, O, P, Q que nous joignons.

Nous constatons que la ligne tracée est une droite. Cette ligne représente les espaces.

La ligne qui représente les espaces du mouvement uniforme est une ligne droite oblique.

2.6.4. Conclusion.

Remarquons que le graphique permet par une simple lecture de déterminer un élément en connaissant deux autres.



2e leçon.

1ère Partie - La cinématique.

Chapitre 2 - Le mouvement uniforme (suite).

2.7. Cas particuliers du mouvement uniforme.

2.7.1. Le mouvement rectiligne uniforme.

Le mouvement rectiligne uniforme est un mouvement dont la trajectoire est une ligne droite.

Il répond aux mêmes lois que le mouvement uniforme.

2.7.2. Le mouvement circulaire uniforme.

1. Soulevons une bicyclette et examinons le mouvement d'une roue que nous faisons tourner. On dit que la roue est animée d'un mouvement de rotation.

2. Repérons un point sur le pneu.

Faisons tourner doucement la roue et arrêtons-la au moment où le point a repris la même position qu'avant que la roue ne tourne.

La trajectoire ^{du} point est un cercle, une circonférence.

3. Le chemin parcouru pendant que le point fait un tour vaut la longueur de la circonférence décrite par le point.

$$\text{Longueur d'une circonférence} = \pi \times D = 2 \pi \times R$$

D = diamètre de la circonférence;

R = rayon de la circonférence; distance du point repéré au centre de la roue.

Si la roue fait 5 tours, le chemin vaut $2\pi \times R \times 5$

Si la roue fait N tours, le chemin vaut $2\pi \times R \times N$

4. 1er cas. Faisons tourner à nouveau doucement la roue et mesurons le temps que le point repéré met pour parcourir 1 tour. Ce temps est t_1 et vaut 6 secondes.

2ème cas. Faisons toujours tourner la roue, mais un peu plus vite, le temps t_2 vaut cette fois 5 secondes.

3ème cas. Cette fois, la roue tourne encore plus vite et le temps t_3 que le point met pour parcourir 1 tour vaut 2 secondes.

2. Ces temps t_1, t_2, t_3 correspondent chacun à un certain nombre de tours par minute.

En effet:

1er cas:

En 8 secondes, le point parcourt 1 tour ou un espace de $2\pi \times R$ mètres

En 1 seconde, le point parcourt $\frac{1}{8}$ tour, ou un espace de $\frac{2\pi \times R}{8}$ mètres

En 60 secondes ou 1 minute, le point parcourt $\frac{60 \times 1}{8} =$

7,5 tours ou un espace de $\frac{2 \times \pi \times R \times 60}{8} \text{ m} =$

$2 \times \pi \times R \times 7,5$ mètres.

2ème cas:

En 5 secondes, le point parcourt 1 tour ou un espace de $2\pi \times R$ mètres;

En 1 seconde, le point parcourt $\frac{1}{5}$ tour ou un espace de $\frac{2\pi \times R}{5}$ mètres;

En 60 secondes ou 1 minute, le point parcourt $\frac{60 \times 1}{5} =$
12 tours ou un espace de $\frac{2\pi \times R \times 60}{5}$ m ou $12\pi R \times 12 \text{ m}$.

3ème cas.

En 2 secondes, le point parcourt 1 tour ou un espace de $2\pi \times R$ mètres

En 1 seconde, le point parcourt $\frac{1}{2}$ ou un espace de $\frac{2\pi \times R}{2} \text{ m}$

En 60 secondes ou 1 minute, le point parcourt $\frac{60 \times 1}{2} =$

30 tours ou un espace de $\frac{2\pi \times R \times 60}{2}$ mètres =

$2\pi \times R \times 30 \text{ m}$.

Conclusion.

Quand le temps de parcours ^{pour un tour} diminue, le nombre de tours par unité de temps (1 minute) augmente ainsi que l'espace parcouru en mètres par unité de temps.

Fixons $R =$ le rayon de la roue à 0,300 m et dressons un tableau relatif aux trois cas précédents:

Temps de parcours d'un tour	Nombre de tours N par minute	Espace parcouru en m par minute ou V	Espace parcouru en m/s ou v
↑ 8 secondes	↓ 7,5	↓ 14,10	↓ 0,235
↑ 5 "	↓ 12	↓ 22,62	↓ 0,377
↑ 2 "	↓ 30	↓ 56,52	↓ 0,942

Nous avons défini l'espace parcouru par unité de temps. C'est la vitesse V.

La vitesse V en m:minute vaut $2 \pi \times R \times N$.

Comme la vitesse s'exprime en m:s (v), elle vaudra

$$v = \frac{V}{60} = \frac{2 \pi \times R \times N}{60} = \frac{\pi \times R \times N}{30}$$

$$v = \frac{\pi \times R \times N}{30}$$

ou si l'on tient compte que le rayon $R = \frac{D}{2}$ (demi-diamètre) nous aurons:

$$v = \frac{\pi \times D \times N}{30 \times 2} ; \quad v = \frac{\pi \times D \times N}{60}$$

Remarque.

Si, au lieu de choisir le point sur le pneu ($R_1 = 0,300 \text{ m}$) on prenait un point situé sur un rayon, R_1 deviendrait $0,200 \text{ m}$ par exemple; $v = \frac{\pi \times R_1 \times N}{30}$ ce qui donnerait pour un nombre de tours de 7,5 tours : m; une vitesse $v_1 = 0,157 \text{ m/s}$.

Si nous prenons un 3e point de rayon $R_2 = 0,150 \text{ m}$, on trouverait $V_2 = 0,1175 \text{ m/s}$.

$$\frac{v}{v_1} = \frac{0,235}{0,156} = \frac{3}{2} ; \quad \frac{R}{R_1} = \frac{0,300}{0,200} = \frac{3}{2}$$

Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre-elles d'où: $\frac{v}{v_1} = \frac{R}{R_1}$

$$\frac{v}{v_2} = \frac{0,235}{0,1175} = 2 ; \quad \frac{R}{R_2} = \frac{0,300}{0,150} = 2$$

Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles d'où: $\frac{v}{v_2} = \frac{R}{R_2}$

Et d'une façon générale:

Dans le mouvement circulaire uniforme, les vitesses sont proportionnelles à la grandeur des rayons.

Remarque. Les vitesses v , v_1 , v_2 sont appelées généralement vitesses linéaires ou vitesses circonférentielles.

x
x x

Chapitre 3 - Le mouvement varié.

3.1. Vous êtes installé dans une voiture à l'arrêt (vitesse = zéro). La voiture démarre et après quelques instants vous regardez l'indicateur de vitesse, il indique une vitesse $v = 60$ km/heure (16,7 m/s).

Que s'est-il passé ?

Décomposons le mouvement et notons les vitesses de l'indicateur à chaque seconde depuis le départ (automobile en repos, vitesse = 0).

Ces vitesses ont été ramenées en m/s).

Temps	Vitesse m/s	Différences ou accroissement de vitesse
au départ	0	-
Après 1 s	2	2
" 2 s	4	2
" 3 s	6	2
" 4 s	8	2
" 5 s	10	2
" 6 s	12	2
" 7 s	14	2
" 8 s	16	2

L'automobile est partie de la vitesse zéro.

La vitesse n'a fait qu'augmenter.

3.2. Un mouvement dont la vitesse augmente est appelé mouvement accéléré.

3.3. Il y a augmentation de vitesse après chaque seconde (unité de temps).

Cette augmentation de vitesse par seconde s'appelle accélération.

L'accélération d'un mouvement, c'est la valeur de l'augmentation de vitesse par unité de temps.

3.4. Dans le cas choisi, la vitesse augmente de la même quantité, 2 m, uniformément, après chaque seconde.

On dit que le mouvement est uniformément accéléré.

3.5. Unité d'accélération.

$$\text{Accélération} = \frac{\text{Augmentation de vitesse}}{\text{seconde}} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pour diviser une fraction par un nombre, on multiplie son dénominateur par ce nombre:

$$\frac{\text{m}}{\text{s} \times \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{ou} \quad \text{m/s}^2$$

3.6. Lois du mouvement uniformément accéléré.

3.6.1. Vitesses. Supposons un mobile animé d'un mouvement caractérisé par une vitesse v , un temps t et une accélération a .

Après la 1ère seconde,	la vitesse	vaut	$a \times 1$
" " 2e	" "	" "	$a \times 2$
" " 3e	" "	" "	$a \times 3$

.....
Après la t e seconde, la vitesse vaut $a \times t$

$$v = a \times t \quad (1)$$

le loi. Dans le mouvement uniformément accéléré, la vitesse v après un temps t est égale à l'accélération multipliée par le temps.

De $v = a \times t$, nous pouvons trouver $t = \frac{v}{a}$ et $a = \frac{v}{t}$

Vitesse moyenne.

Dans son mouvement uniformément accéléré, l'automobile part d'une vitesse initiale de 0 pour aboutir à une vitesse se finale de 16 m/s, après 8 s.

Pendant ce mouvement, elle a parcouru un certain espace e.

Il est possible de parcourir cet espace e à une vitesse uniforme v_m avec le même temps t de 8 s.

Mais ce mouvement à vitesse uniforme, c'est le mouvement rectiligne uniforme v_m et la loi des espaces est connue $e = v_m \times t$.

Si nous connaissons v_m , nous pouvons calculer l'espace e nécessaire à l'automobile, qui part du repos pour atteindre une vitesse de 16 m/s.

6.

On peut montrer (voir plus loin § 3.7.2) que la vitesse v_m uniforme du mouvement rectiligne uniforme est égale à la moyenne des vitesses initiale et finale du mouvement uniformément accéléré: c'est la vitesse moyenne de ce dernier mouvement.

En arithmétique, la moyenne de deux quantités est leur demi-somme.

La moyenne des vitesses ou vitesse moyenne est égale à la demi-somme des vitesses initiale v_i et finale v_f .

$$v_m = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{0 + 16}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}$$

$$v_m = \frac{0 + v_f}{2} = \frac{v_f}{2}$$

v_f est la vitesse finale, après t secondes et nous savons que $v_f = a \times t$

$$v_m = \frac{a \times t}{2},$$

$$v_m = \frac{1}{2} a \times t$$

Cours 1203
2^{ème} leçon

Chapitre 3 - Le mouvement varié (suite).3.6. Lois du mouvement uniformément accéléré (suite).

3.6.2. Espaces. Nous connaissons v_m et nous pouvons calculer e

$$e = v_m \times t \quad \text{ou} \quad e = \frac{a \times t}{2} \times t$$

$$e = \frac{1}{2} a \times t^2 \quad (2)$$

2e Loi. L'espace parcouru par un corps animé d'un mouvement uniformément accéléré est égal au demi-produit de l'accélération par le carré du temps.

3.6.3. Temps.

De $e = \frac{1}{2} a \times t^2$, nous tirons: $2e = a \times t^2$

$$a \times t^2 = 2e$$

$$t^2 = \frac{2e}{a}$$

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}} \quad (3)$$

N.B. $\sqrt{\frac{2e}{a}}$ s'exprime: Racine carrée de $\frac{2e}{a}$

Cette expression a été étudiée en arithmétique.

3.6.4. Expression de la vitesse en fonction de l'accélération du mouvement de l'espace parcouru.

Dans l'expression (1) du § 3.6.1: $v = a \times t$

Nous remplaçons t par sa valeur (3) trouvée au § 3.6.3: $t =$

$$\sqrt{\frac{2e}{a}}$$

Nous trouvons ainsi:

$$v = a \times \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

ou encore: $v = \sqrt{\frac{2 \times a \times a \times e}{a}} = \sqrt{2 \times a \times e}$

$$v = \sqrt{2 a \times e} \quad (4)$$

3.7. Représentation graphique (vitesse, espace, accélération, temps) du mouvement uniformément accéléré.

3.7.1. Vitesses. Reprenons l'exemple du § 3.1.

Nous traçons deux axes $O X$ et $O Y$ (figure 3).

Sur $O X$, nous portons la valeur des temps à l'échelle ($\frac{1}{2}$ cm = 1 seconde), nous avons les points 1, 2, 3, 4, ..., 8. Au point 0, la vitesse vaut 0.

Au point 1, nous élevons une perpendiculaire à $O X$ et nous donnons à cette verticale une longueur représentant la vitesse correspondant à la 2e s, soit 2 m/s (échelle des vitesses $\frac{1}{2}$ cm = 1 m/s).

En 2, 3, ..., 8, nous élevons des verticales ayant respectivement pour longueur la valeur représentant la vitesse correspondant à ces temps, soient 2, 4, ..., 16 m/s.

Nous joignons les extrémités des verticales et nous trouvons une ligne droite. Cette droite représente les *diagramme des vitesses*.

Cette ligne des vitesses permet de lire directement la vitesse correspondant à un temps donné. Exemple: après 4,5 secondes, la vitesse vaut 9 m/s.

L'accélération est aussi visible sur le graphique. Nous savons que l'accélération = augmentation de vitesse par seconde.

Cette augmentation c'est MN ou PQ et elle vaut chaque fois 2 m/s.

3.7.2. Espaces parcourus.

L'expression (2) de l'espace parcouru (§ 3.6.2) est

$$e = \frac{1}{2} a \times t^2$$

Examinons le graphique de la figure 4 qui est analogue à celui de la figure 3. La ligne OB représente les vitesses en fonction des temps.

La surface S de OBP vaut $OP \times \frac{BP}{2}$

OP représente le temps \checkmark BP représente la vitesse v .

Or, $v = a \times t$ (1) (§ 3.6.1)

$$S = t \times \frac{a \times t}{2} = \frac{a \times t^2}{2}$$

La surface OBP représente donc la valeur de l'espace parcouru.

3.7.3. Vitesse moyenne.

Nous avons que $v_m = \frac{v_i + v_f}{2}$

Or, ~~par~~ l'exemple ci-dessous:

$$v_m = \frac{0 + 16}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s (1)}$$

$$\text{et } v_m = \frac{0 + v_f}{2} = \frac{1}{2} v_f \text{ (2)}$$

Nous vérifions ces deux notions sur le graphique (fig. 4).

En effet, (1) signifie que l'espace parcouru "e1" pour l'automobile partant du repos pour atteindre 16 m/s après 8 s est le même que l'espace e2 parcouru par l'automobile roulant uniformément à 4 m/s pendant le même temps.

Examinons le graphique de la figure 4. Les temps sont bien égaux, 8s dans chaque cas.

$$\begin{aligned} \text{Espace } e_1 &= \text{surface du triangle OBP} = \frac{1}{2} B \times H_1 = \\ & \frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Espace } e_2 &= \text{surface du rectangle OCEP} = B \times H_2 = \\ & 8 \times 8 = 64 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que les espaces ^{parcourus} sont bien égaux.

Remarque: Pour que les surfaces OBP et OCEP soient égales, il faut que les deux triangles BDE et OCD soient égaux d'où $BP = OC = \frac{1}{2} BP$. Nous prouvons par là que $v_m = \frac{1}{2} v_f$ (2).

Chapitre 4. - Le mouvement uniformément accéléré.

4.1. Vitesse.

Nous venons de voir que le mouvement uniformément accéléré est celui d'un train qui du repos (vitesse zéro) se met en mouvement, accélère et atteint une vitesse de 80 Km/h par exemple.

4.

Le mouvement uniformément varié est celui d'un train qui, roulant à la vitesse uniforme de 40 km/heure, accélère à un moment donné pour atteindre une vitesse de 80 km/heure.

La vitesse initiale n'est plus zéro, mais vaut 40 km/heure. Nous appelons la vitesse initiale: V_i ; la vitesse *finale* v_f ; l'accélération a et t le temps nécessaire pour passer de la vitesse v_i à v_f .

Après la seconde 1, la vitesse sera $V_i + a$
" 2, " " $V_i + a + a = V_i + 2 \times a$
" 3, " " $V_i + a + a + a = V_i + 3 \times a$
" t, " " $V_i + t \times a$

$$\text{Donc: } v_f = V_i + a \times t \quad (1)$$

La vitesse après un temps t est égale à la vitesse initiale augmentée de la vitesse due à l'accélération.

4.2. Vitesse moyenne.

$$V_m = \frac{V_i + v_f}{2} \quad (2)$$

$$v_f = V_i + (a \times t)$$

D'où, en remplaçant v_f par cette valeur dans (2):

$$V_m = \frac{V_i + V_i + a \times t}{2}$$

$$V_m = \frac{2 V_i + a \times t}{2}$$

$$V_m = V_i + \frac{a \times t}{2}$$

4.3. Espace parcouru.

Nous savons que $e = v_m \times t \quad (2)$

$$\text{Or, } V_m = V_i + \frac{a \times t}{2}$$

donc (2) devient $e = (V_i + \frac{a \times t}{2}) \times t$ et

$$e = V_i \times t + \frac{a \times t^2}{2}$$

4e leçon. 1ère Partie - La cinématique.

Chapitre 5 - Le mouvement uniformément retardé.

5.1. Généralités.

Le mouvement retardé est celui d'un train qui roulant à une vitesse de 80 km/heure ralentit pour s'arrêter (vitesse zéro).

Lorsque la chute de vitesse est la même à chaque seconde (constante), le mouvement est appelé uniformément retardé.

La chute de vitesse est dite décélération ou accélération négative.

Remarque.

Un mouvement retardé est aussi celui d'un train roulant à 80 km: heure, ralentit jusqu'à une vitesse de 40 km: heures et continue à rouler à cette allure. C'est le mouvement retardé général.

5.2. Vitesse.

La vitesse initiale, c'est V_i .

La vitesse finale: V_f

a = décélération.

A la fin de la seconde 1 : $V_f = V_i - a$

A la fin de la seconde 2 : $V_f = V_i - a \times 2$

A la fin de la seconde 3 : $V_f = V_i - a \times 3$

A la fin de la seconde t ; $V_f = V_i - a \times t$

$$V_f = V_i - a \times t \quad (1)$$

La vitesse finale vaut la vitesse initiale diminuée de la chute de vitesse due à la décélération.

5.3. Remarque.

Lorsque le train (le mobile) s'arrête (vitesse = 0) V_f est alors égale à zéro.

$$0 = V_i - a \times t \quad \text{ou}$$

$$V_i = a \times t$$

5.4. Vitesse moyenne.

La vitesse moyenne V_m = demi-somme des vitesses initiales V_i et finale V_f .

$$V_m = \frac{V_i + V_f}{2} \quad (2)$$

2.

Nous savons que (1) = $V_f = V_i - axt$

Nous remplaçons V_f par cette valeur dans (2)

$$V_m = \frac{V_i + V_i - axt}{2}$$

$$V_m = \frac{2 V_i - axt}{2}$$

$$V_m = V_i - \frac{axt}{2}$$

5.5. Espace parcouru.

Le train A roulant à 80 km/h et qui ralentit pour atteindre la vitesse zéro a mis pour réaliser cette opération un temps "t" et a couvert une distance "e".

Pendant ce même temps t, un autre train B circulant sur une voie voisine aurait pu très bien parcourir la même distance, mais à une vitesse V_m constante, V_m est appelée vitesse moyenne.

Le mouvement de ce train B est donc un mouvement uniforme et l'espace parcouru par le

$$\text{Train B} - e = V_m \times t \quad (1)$$

La vitesse moyenne du mouvement retardé du train A vaut (§ 6.4) :

$$V_m = V_i - \frac{axt}{2} \quad (2)$$

Remplaçons dans (1) V_m par sa valeur (2)

$$e = \left(V_i - \frac{axt}{2} \right) \times t = V_i t - \frac{axt^2}{2}$$

$$e = V_i \times t - \frac{axt^2}{2}$$

Chapitre 6.- Chute des corps.

6.1. Remarque préliminaire.

Prenons trois décimètres-cube (un dm^3 - un cube d'un décimètre de côté), l'un de plomb, l'autre d'acier, le troisième de bois.

Il est évident que le dm^3 de plomb est plus lourd que celui d'acier. Le cube d'acier est lui-même plus pesant que le cube de bois.

On dit que le plomb est le plus dense des trois et le bois le moins dense.

Cette propriété des corps que nous étudierons plus particulièrement dans le cours de physique est appelée densité.

6.2. La Pesanteur.

Lâchons un corps : un canif, une gomme, un crayon.

Le corps tombe.

Sous quel effet ? Le corps tombe sous l'effet de la pesanteur.

6.3. Notion.

La pesanteur est une force qui sollicite les corps à tomber vers le sol.

6.4. 1^{re} observation.

Nous prenons un tube de verre fermé aux 2 extrémités et nous y introduisons les mêmes corps que ci-dessus. Nous enlevons l'air du tube (nous y faisons le vide). Nous le retournons alors brusquement et que remarquons-nous ? Nous voyons avec surprise que les 3 corps tombent également vite.

6.5. Conclusion.

Dans le vide, tous les corps tombent également vite.

6.6. 2^e observation.

Nous laissons tomber simultanément et librement trois corps de matières diverses, (de densité différente) soit par exemple un morceau de bois, un morceau d'acier et un de plomb. Ces trois corps tomberont l'un après l'autre. Le plomb est suivi de l'acier et le bois vient ensuite.

6.7. Conclusion.

Dans l'air, la densité des corps règle leur vitesse de chute.

6.8. 3^e Observation.

Laissons tomber librement dans l'air et simultanément deux morceaux de bois de même poids et de même forme.

Nous faisons tomber le premier de champ et le second à plat. Le second arrivera au sol après le premier.

6.9. Conclusion.

Un même corps peut prendre des vitesses nettement différentes suivant la surface qu'il présente à l'air. L'air offre donc une certaine résistance.

De nombreuses expériences démontrent qu'un corps qui tombe dans le vide prend un mouvement uniformément accéléré.

En mécanique élémentaire, on néglige la résistance de l'air.

6.10. Lois.

Les lois de la chute des corps dans le vide sont celles du mouvement uniformément accéléré.

La vitesse d'un corps qui tombe librement : $V = axt$ (1)
 L'espace parcouru par ce corps : $e = \frac{axt^2}{2}$ (2)

6.11. Calcul de l'accélération due à la pesanteur.

L'accélération a a une valeur bien caractéristique. Des expériences ont prouvé que l'espace parcouru pendant la 1ère seconde de chute d'un corps tombant librement dans le vide est de 4,905 m, quelle que soit la nature du corps. Puisque l'on connaît l'espace parcouru; il est facile de calculer l'accélération de ce mouvement en remplaçant e et t par leur valeur respective :

$$e = \frac{axt^2}{2}$$

$$4,905 = \frac{axt^2}{2}$$

$$\text{et } a = 4,905 \times 2 = 9,81 \text{ m : s : s}$$

Désignons maintenant cette accélération déterminée par g et le chemin parcouru ou la hauteur de chute par h , les formules (1) et (2) deviennent :

$$V = g \times t$$

$$h = \frac{g \times t^2}{2}$$

6.12. Calcul du temps de chute.

1) En fonction de la vitesse - Nous connaissons la relation $V = g \times t$ d'où : $t = \frac{V}{g}$

2) En fonction de la hauteur - De la relation $h = \frac{gt^2}{2}$, nous tirons $t = \frac{2h}{g}$, d'où $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

6.13. Calcul de la vitesse en fonction de la hauteur de chute.

Un problème qui se présente fréquemment est celui qui consiste à rechercher la vitesse V d'un corps qui tombe d'une hauteur connue h .

Calculons cette vitesse.

$$\text{Nous savons que } V = g \times t \quad (3)$$

$$\text{et } h = \frac{g t^2}{2} \quad (4)$$

$$\text{De (4), nous pouvons tirer } t^2 = \frac{2 h}{g} \quad (5)$$

Si nous élevons au carré (3), nous obtenons :

$$V^2 = g^2 \times t^2 \quad (6)$$

En remplaçant dans (6), t^2 par sa valeur dans (5), nous trouvons :

$$V^2 = g^2 \times \frac{2 h}{g}$$

$$V^2 = 2 g \times h$$

$$\text{et } \boxed{V = \sqrt{2 g \times h}}$$

6.14. Remarque.

La valeur de l'accélération due à la pesanteur "g" n'est pas constante en tous les points du globe.

Elle varie avec la hauteur à laquelle on se trouve (altitude) et avec la distance du point considéré à l'équateur (latitude).

1re Partie - Cinématique.

Chapitre 7 : Applications industrielles de la cinématique.

Transmissions de mouvement.

7.1. Transmissions de mouvements circulaires.

7.1.1. Les arbres sont éloignés et parallèles.

1. Transmission par courroies.

a) Courroie droite.

La figure 5 montre le dispositif choisi.

Il s'agit de deux poulies A - B dont les axes sont séparés par la distance d de la courroie qui les unit. Si nous communiquons à la poulie A un mouvement de rotation, successivement dans les deux sens, nous constatons que la poulie B prend aussi un mouvement de rotation. Le sens de la rotation de B est le même que celui de la rotation qui anime A.

Conclusion.

Les poulies réunies par une courroie droite tournent dans le même sens.

b) Courroie croisée.

La figure 6 comporte le même mécanisme que la figure 5. Au lieu d'avoir une courroie droite, on a placé une courroie croisée.

Animons la poulie A d'une rotation; B tourne également, le sens de la rotation de B est l'inverse du sens de la rotation de A.

Conclusion.

Les poulies réunies par une courroie croisée tournent en sens inverse.

c) Vitesses.

Faisons tourner le mécanisme de la figure 5.

La poulie A dont le diamètre est plus petit que celui de B effectue en un temps donné, plus de tours que la poulie B.

Examinons le problème de plus près. Accouplons par une courroie des poulies de diamètre connus : $D_1 = 30$ mm et $D_2 = 120$ mm. Désignons les vitesses en tours / min. par N_1 et N_2 . L'arbre A commande l'arbre B (fig. 7).

Remarque.

La courroie a la même vitesse en chacun de ses points. En effet, si cela n'était pas, la courroie chevaucherait. Son fonctionnement serait alors anormal.

Nous pouvons donc dire que les vitesses de la courroie aux points K et M sont égales.

Dans le cas théorique où l'adhérence est totale, les vitesses de la courroie et de la poulie sont égales.

Conclusion.

La vitesse linéaire d'un point O quelconque de la courroie menante d'arbre A est égale à celle d'un point quelconque P de la poulie menée.

Examinons les vitesses respectives en nous souvenant de la loi de la vitesse du mouvement circulaire uniforme :

$$V = \pi \times D \times n \quad (n = \text{nombre de tours } n \text{ par seconde})$$

$$\text{et } V = \frac{\pi \times D \times N}{60} \quad (N = \text{nombre de tours par minute}).$$

Vitesse d'un point O de la poulie menante A :

$$V = \frac{\pi \times 30 \times N_1}{60}$$

Vitesse d'un point P de la poulie menée B :

$$V = \frac{\pi \times 120 \times N_2}{60}$$

Ces vitesses sont égales (condition de fonctionnement du mécanisme)

$$\text{et } \frac{\pi \times 30 \times N_1}{60} = \frac{\pi \times 120 \times N_2}{60}.$$

Simplifions :

$$30 N_1 = 120 N_2, \text{ ou encore, } \frac{N_1}{N_2} = \frac{120}{30} \quad (1); \text{ et } \frac{N_1}{N_2} = 4 \quad (2);$$

ou en remplaçant les diamètres 30 mm et 120 mm par les lettres correspondantes:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{D_2}{D_1} \quad (1)$$

Dans l'exemple numérique qui nous conduit à la relation (2) si le rapport du diamètre de la grande poulie à celui de la petite poulie est de 4, le rapport du nombre de tours de la petite poulie au nombre de tours de la grande poulie sera aussi de 4

Cela signifie que la petite poulie tournera avec un nombre de tours 4 fois plus grand que le nombre de tours dont est animée la grande poulie.

Conclusion.

Les nombres de tours sont inversement proportionnels aux diamètres et réciproquement.

d) Adhérence - Glissement.

La loi qui précède n'est cependant pas tout à fait exacte. Dans la démonstration, nous avons supposé une adhérence, "un collage" parfait de la courroie sur les poulies. En réalité, ce n'est pas absolument exact. On note une légère perte de vitesse de la poulie menée par rapport à la poulie menante.

Dans la transmission pratique (fig. 8), la courroie ne "colle" pas parfaitement sur les poulies. Ce fait s'explique par la présence d'air. Cet air est entraîné par le mouvement de la courroie et s'intercale entre elle et la poulie .

L'air se met sous pression et tend à soulever la courroie et à la décoller de la poulie.

De plus, l'existence d'une force que nous étudierons plus loin, appelée force centrifuge, tend aussi à écarter la courroie de la poulie.

Ces deux causes provoquent le glissement de la courroie.

Pratiquement, la diminution de vitesse qui résulte du glissement est de l'ordre de 2 à 5 %.

Elle varie d'après divers éléments tels que : la nature et les dimensions de la courroie, la nature et les dimensions des poulies, la distance entre les axes et l'importance des efforts transmis.

Moyens d'éviter le glissement (d'accroître l'adhérence).

1. Pâtes à base de suif et de résine que l'on applique par petites quantités en les frottant sur la courroie.

L'abus de ces produits corrode les courriés et par conséquent abrège leur durée.

2. Vis-tendeurs qui rectifient la tension de la courroie.
3. Raccourcissement de la courrie.
4. Pour les courroies larges (200 mm et plus, forage de trous de 15 à 25 mm dans la jante de la poulie. Ces trous sont destinés à l'évacuation de l'air qui en leur absence se comprimerait entre courroie et jante.
5. Pour les courroies larges, adoption de courroies de type "Pieuvre" ou "Titan".

e) Bombage des poulies.

Afin d'assurer un guidage continu de la courroie sur la poulie, on donne à la surface de la jante d'une des poulies, un profil bombé (fig. 9). Cette forme rappelle continuellement la courroie vers l'axe transversal de la poulie.

On bombe la jante de la plus petite des deux poulies; c'est la solution la moins coûteuse.

f) Distance d'axe en axe.

Pour qu'une transmission par courroie fonctionne normalement, il faut que la distance d'axe en axe des poulies vaille au moins deux fois la somme des diamètres des poulies menante et menée.

Exemple.

Une transmission composée de deux poulies de $\varnothing = 500$ mm et $\varnothing = 800$ mm. Les deux poulies devront au moins avoir une distance d'axe en axe de

$$(500 + 800) \times 2 = 2.600 \text{ mm. ou } 2,60 \text{ m.}$$

Si la distance d'axe en axe est trop petite, la courroie glisse sur les poulies et la transmission est défectueuse.

Les figures 8 et 10 nous montrent les schémas de deux transmissions possédant des poulies de même diamètre mais dont la distance d'axe en axe est nettement différente.

Nous voyons que l'axe embrassé par la courroie sur la petite poulie est plus petit à la figure 10 qu'à la figure 8. La transmission de mouvement dans le cas de la figure 10 est rendue difficile. Un glissement important est à craindre.

Lorsque des conditions locales exigent l'établissement d'une transmission dont la distance d'axe en axe est très petite, on utilise un dispositif spécial dit "tendeur".

Ce tendeur a la propriété d'accroître l'axe d'embrassement de la courroie (fig. 12).

Cet appareil comprend un galet. Ce galet peut pivoter autour d'un axe fixe; il s'appuie sur le brin conduit de la courroie.

L'action du poids du galet peut être renforcée par un contrepoids.

Le poids du galet et celui du contrepoids éventuel doit être proportionnel à l'effort de traction dans la courroie.

L'emploi d'un tendeur exige que la courroie soit sans fin. Cette condition est nécessaire pour que les deux faces de la courroie frottent sur les poulies et le galet; elle est réalisée pratiquement par couture ou collage de la jonction. Il existe aussi des courroies spécialement tissées sur mesure et sans fin.

Un procédé très élégant, utilisé lorsque la distance d'axe en axe des poulies est réduite, consiste en l'utilisation de courroies trapézoïdales.

g) Sens de rotation.

Dans une transmission par courroie, il y a un brin tendu et un brin mou.

Le premier est celui qui tire sur la poulie menée et qui l'entraîne.

Dans la figure 13, c'est le brin inférieur qui provoque la rotation de la poulie B. Le brin supérieur ne participe pas avec la même importance que le brin tendu à la transmission du mouvement par suite de la flexibilité de la courroie. C'est pour cette raison que ce brin prend la forme incurvée.

On l'appelle généralement le brin mou. Quand on a le libre choix du sens de rotation, il y a intérêt de placer le brin mou au-dessus.

Dans cette disposition, la valeur de l'axe d'embrassement de la courroie sur la poulie est augmenté; si le brin mou est disposé en dessous, la valeur de cet arc est diminué.

h) Vitesses des courroies plates.

On adopte généralement une vitesse linéaire moyenne de 20 m / s pour les transmissions ordinaires, 27 m / s pour les transmissions de gros efforts, 30 m / s est la limite généralement admise par les constructeurs.

i) Pouliessétagées ou cônes de vitesse.

Dans les machines-outils commandées par transmission, on rencontre fréquemment des cônes de vitesses ou poulies étagées. Ce mécanisme permet l'obtention de vitesses différentes à l'arbre commandé bien que la rotation de l'arbre de commande soit constante (fig. 14).

Il y a une condition essentielle de bon fonctionnement de cet appareil.

Puisque la courroie a toujours la même longueur quelle que soit sa position, il faut que les sommes des diamètres des poulies $A_1 + A_2$, $B_1 + B_2$ et $C_1 + C_2$ soient égales (ou constantes).

j) Pouliés cônes. (fig. 15)

Ce procédé est appliqué pour des faibles efforts.

Le changement de vitesse est réalisé par le déplacement de la courroie sur les cônes. L'angle de conicité varie en général de 12° à 15° .

h) Débrayage par poulies folles.

Ce dispositif est utilisé pour des puissances inférieures à 20 kW. Pour des puissances supérieures, on a recours aux embrayages à friction ou à griffes. On applique le débrayage par poulies folles lorsque deux arbres sont unis par une courroie et que l'un est animé d'une rotation continue tandis que l'autre ne doit tourner que par intermittence.

Ce cas intéresse la commande des tours, foreuses, étaux-limeurs; scies, cisailles, etc...

Supposons les deux arbres P et Q (fig. 16) L'arbre de commande P tourne d'une façon continue et l'arbre Q ne doit tourner que par moments. On cale sur Q une poulie A (fixe) et sur l'arbre P, une poulie plate C ou tambour.

La largeur de ce tambour sera $l = 2 \times$ la largeur de A + 10 à 15 mm. A côté de la poulie A, on placera une poulie B, appelée poulie folle. On lui donne le nom de folle parce qu'elle peut tourner librement sur l'arbre Q. Son déplacement latéral est limité d'un côté par une bague d'arrêt et de l'autre côté par la poulie fixe A. Un dispositif de va et vient permet de faire glisser la courroie d'une poulie à l'autre.

Fonctionnement.

Quand la courroie est sur A, elle entraîne l'arbre Q. A, lorsque la courroie va sur B, B tourne mais Q s'arrête.

2. Transmission par câbles.

Les lois sont les mêmes que celles qui régissent les transmissions par poulies.

a) Câble en chanvre.

Dans certaines industries, on rencontre encore des transmissions par câble en chanvre. Comme ce dispositif est peu usité, nous ne nous étendrons pas plus sur ce sujet.

b) Câble métallique.

En général, les efforts sont transmis par un seul câble, les poulies sont **garnies** de bois ou de cuir pour éviter une usure trop rapide des câbles. Des poulies guides de câble sont disposées tous les 25 à 30 m. selon le diamètre du câble. Le diamètre des poulies vaudra au moins 500 fois le diamètre du fil qui forme les torons du câble.

3. Transmission par chaînes.

Les transmissions par chaînes sont utilisées à la transmission des efforts assez considérables mais avec des vitesses réduites.

Certaines chaînes sont susceptibles de transmettre des puissances de l'ordre de 1000 kW. On utilise en général, la chaîne formée de maillons rivés et entretoisés par des rouleaux ou des buselures (fig. 17).

L'écartement d'axe en axe des rouleaux est appelé pas de la chaîne. Il existe des chaînes simples, doubles (duplex) ou triple (triplex) (voir fig. 18).

Les roues qui portent les chaînes sont dentées et la denture a le même pas que la chaîne.

Il existe des chaînes servant à la manutention mécanique et portant des attaches latérales ou transversales.

Fig. 3.

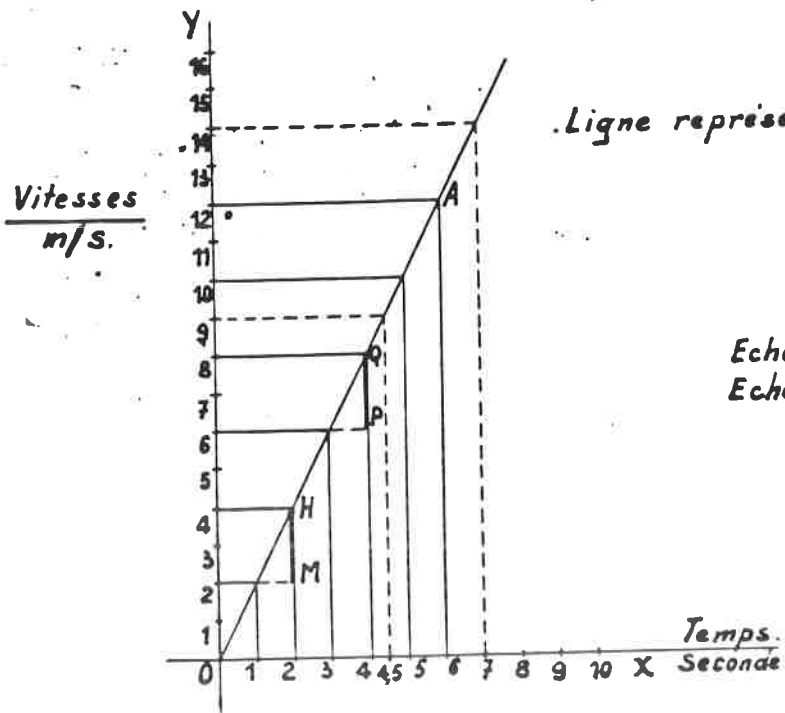
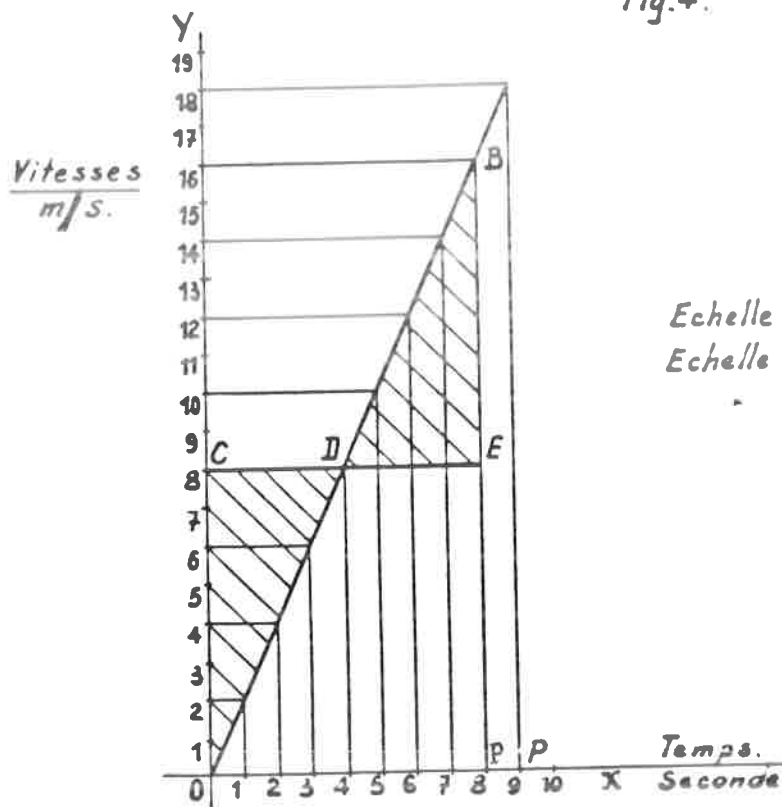


Fig. 4.



(20) 209105. 2.60 (150)

35

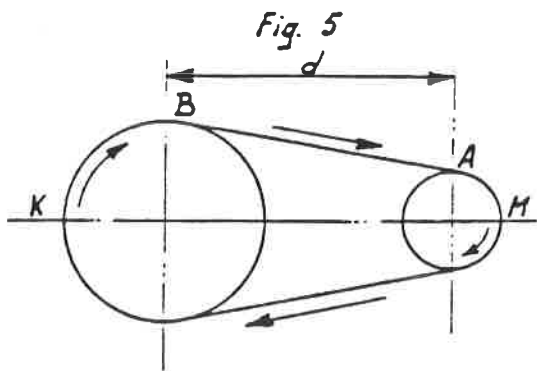


Fig. 5

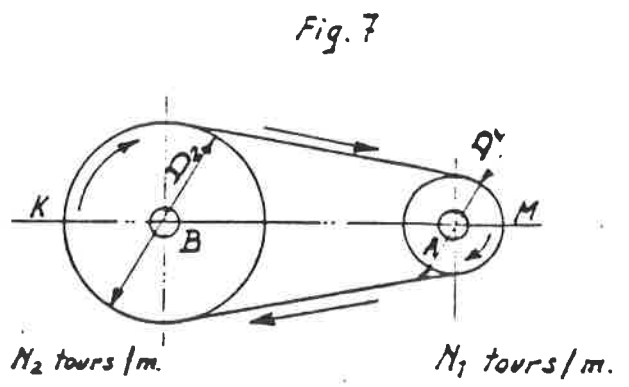


Fig. 7

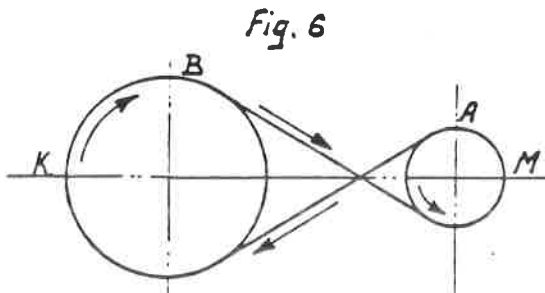


Fig. 6

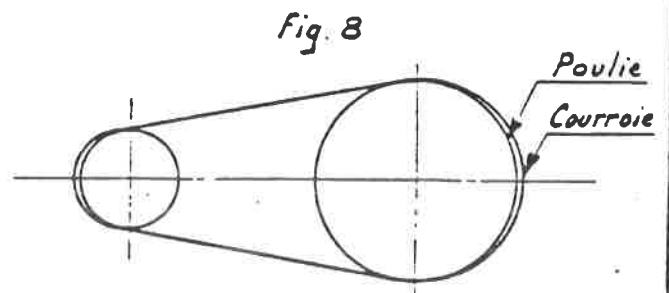


Fig. 8

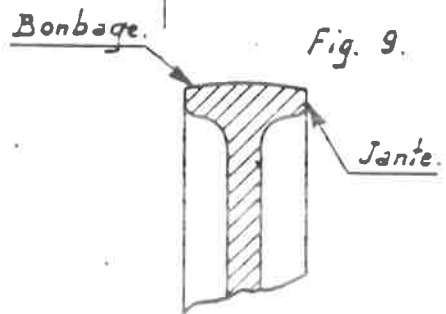


Fig. 9.

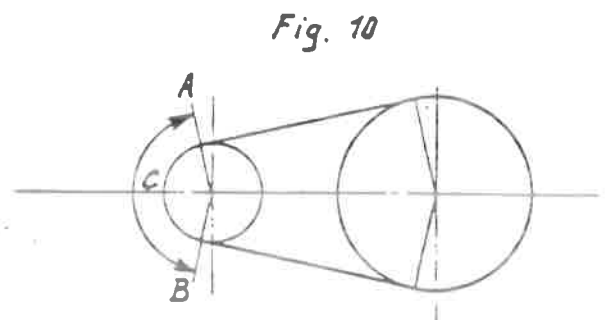


Fig. 10

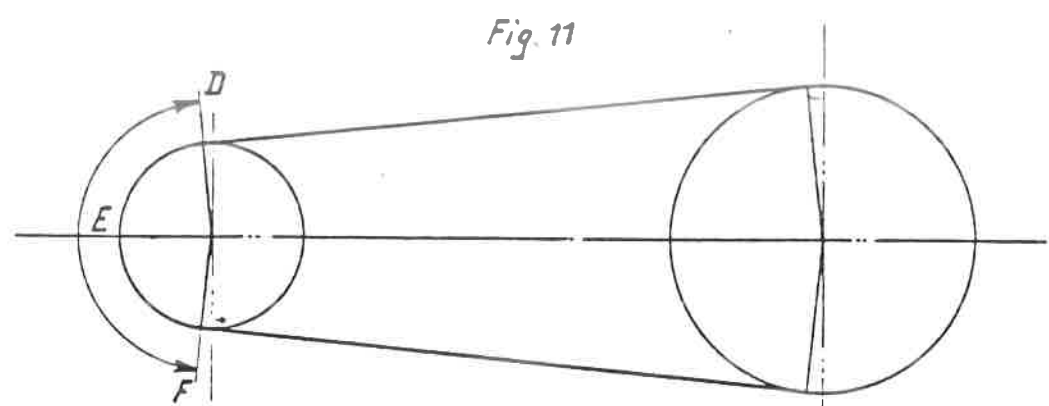


Fig. 11

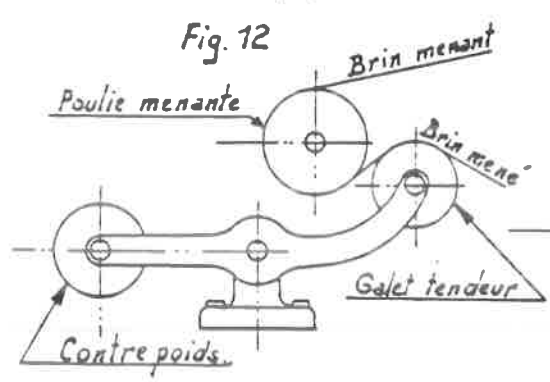


Fig. 12

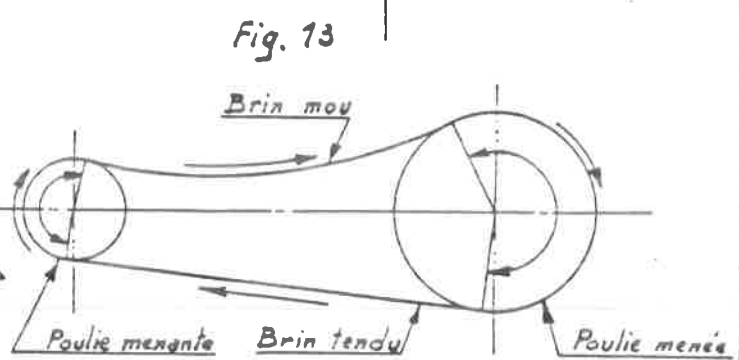


Fig. 13

(C). 201106.10.00 (150)

Fig. 14.

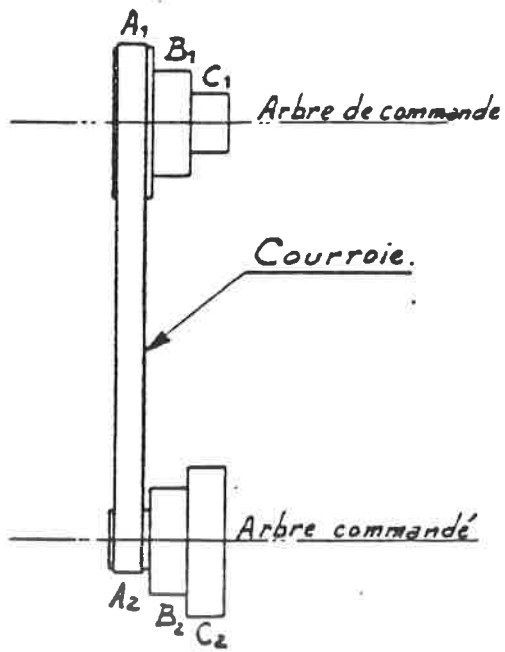


Fig. 15.

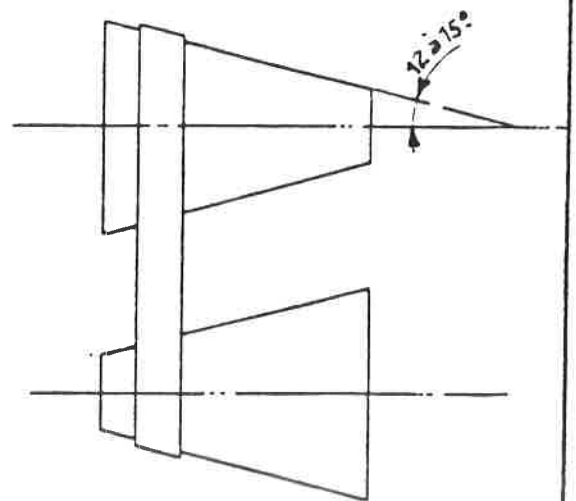


Fig. 16.

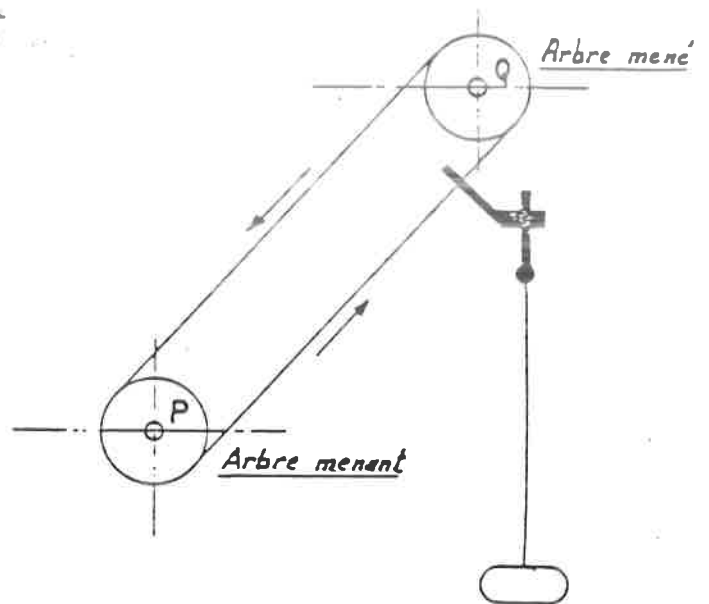
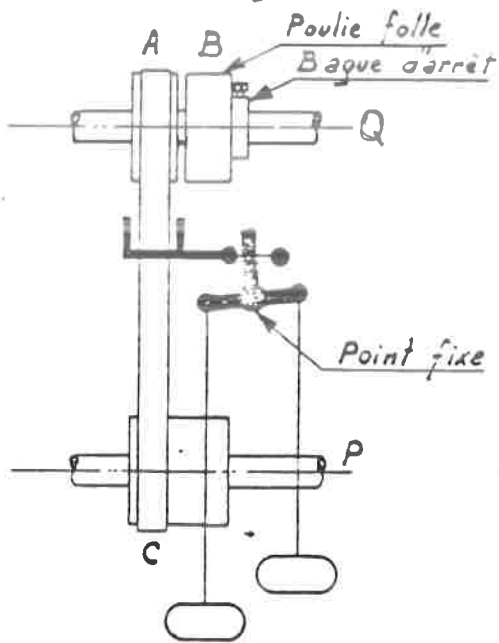


Fig. 17.

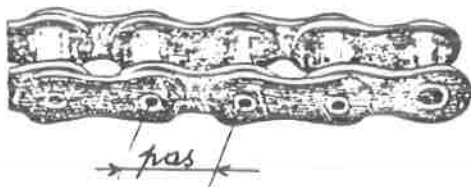
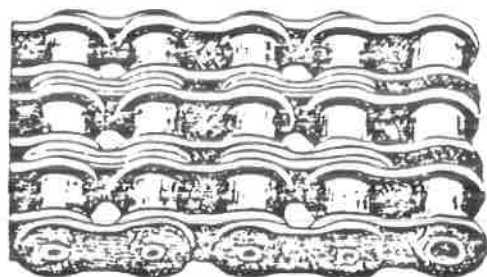


Fig. 18.



Chapitre 7 - Applications industrielles de la cinématique.Transmissions de mouvements.7.1 Transmissions de mouvements circulaires (suite).7.1.2. Les arbres sont rapprochés.

Ce genre de transmission comprend les roues à friction qui sont généralement utilisées là où les efforts sont faibles et les engrenages. Ces derniers sont appliqués dans tous les cas où le rapport des vitesses de rotation doit être rigoureusement respecté.

1. Roues à friction.

a) 1er cas. Les arbres sont parallèles. Le dispositif de la fig. 19 montre la transmission du mouvement par le frottement des jantes entre elles.

Sur les arbres A et B, nous avons respectivement la roue A et la roue B dont les jantes sont parfaitement polies.

Les nombres de tours par seconde des arbres sont n_1 et n_2 . Puisque les jantes sont en contact, les vitesses circonférentielles des deux roues sont identiques, au glissement près.

Vitesse circonférentielle de la roue de diamètre D tournant à raison de n_1 tours par seconde

$$V_1 = \pi D n_1$$

Vitesse circonférentielle de la roue de diamètre d tournant à raison de n_2 tours par seconde

$$V_2 = \pi d n_2$$

$$V_1 = V_2 \text{ d'où: } \pi D n_1 = \pi d n_2$$

$$\text{et } D n_1 = d n_2$$

$$\text{ou encore } \frac{d}{D} = \frac{n_1}{n_2}$$

Loi. Les nombres de tours sont inversement proportionnels aux diamètres et inversement.

2. Remarque. Cette loi ne tient pas compte du glissement qui existe pratiquement. Ce glissement augmente avec l'importance des efforts transmis. Ce genre de transmission ne peut être utilisé que par les petites puissances quand le rapport des nombres de tours ne doit pas être rigoureusement respecté.

b) 2e cas. Les arbres sont perpendiculaires. On dispose les roues comme il est indiqué aux figures 20 ou 21.

circumférentielles

A titre d'exercice, l'élève recherchera les relations qui lient les vitesses des points P, Q et R de la fig. 20 en les considérant respectivement sur l'une et sur l'autre roue et en supposant le glissement nul. Cela revient à dire que les vitesses des points P, Q et R sont les mêmes sur l'une et sur l'autre roue.

La disposition de la figure 21 permet le déplacement de la poulie A sur son axe X. Le point de contact P₁ peut se rapprocher du centre de l'axe Y. Nous supposons que X est l'arbre de commande qui tourne à raison de n tours:seconde. L'arbre commandé peut varier de vitesse comme nous allons le voir.

Nous connaissons la relation $D_1 \times n_1 = d \times n$ (1) qui est valable pour le point P₁; n_1 est le nombre de tours parcouru en 1 seconde par l'arbre Y se trouvant sur un diamètre D_1 de la roue B.

Si le point de contact devient P₂, placé sur un diamètre D_2 , nous trouvons : $D_2 \times n_2 = d \times n$ (2).

Nous savons que, par définition le produit $d \times n$ est constant, nous pouvons donc écrire en partant de (1) et (2) :

$$D_1 \times n_1 = D_2 \times n_2 \quad (3)$$

Comme nous considérons l'exemple de la figure 21 où D_2 est plus petit que D_1 , il faut pour que l'égalité (3) reste vraie que n_2 soit plus grand que n_1 .

Conclusion. Les nombres de tours sont toujours en raison inverse des (ou inversement proportionnels aux) diamètres correspondants.

et dans le cas de la fig. 21 : au fur et à mesure que la roue de commande se rapproche du centre de la roue menée, l'arbre conduit augmente de vitesse.

Sens de rotation. Nous remarquons aussi que lorsque la poulie menante A est en contact avec la poulie B au-dessus de l'axe Y, le sens de rotation de la poulie B est celui

de la flèche I (fig. 21). Si nous déplaçons la poulie de commande vers le bas, en-dessous de l'axe Y, le sens de rotation de la poulie commandée est inversé.

2. Engrenages. Les engrenages conviennent lorsque les efforts sont importants et quand les rapports de vitesse doivent être rigoureusement respectés. Tout glissement est, en effet, rendu impossible.

a) 1er cas. Les arbres sont parallèles. Engrenages cylindriques ou droits.

La transmission entre arbres parallèles se fait généralement par engrenages à denture droite (fig. 23).

Cependant, lorsque les efforts à transmettre sont importants, on utilise les engrenages à chevron (fig. 25).

Les engrenages à denture hélicoïdale (fig. 24) augmentent la douceur de la transmission du mouvement.

Caractéristiques technologiques des engrenages (voir fig. 22).

1. Circonférence primitive. Les circonférences primitives de deux roues dentées sont celles qui restent tangentes entre elles pendant le mouvement de rotation des roues. Elles correspondent aux circonférences extérieures des roues à friction qui remplaceraient les engrenages.

Lorsque deux roues dentées "engrènent", la plus petite est appelée généralement piñon, et l'autre, roue dentée ou engrenage.

2. Cercle de tête : cercle extérieur limitant les têtes des dents.
3. Cercle de pied : cercle intérieur limitant les pieds des dents.
4. Épaisseur de la dent : épaisseur mesurée sur le cercle primitif, c'est donc la longueur d'un arc de cercle.
5. Creux : distance entre deux dents, longueur mesurée sur le cercle primitif.
6. Hauteur de la dent : la hauteur $K N$ comprend deux parties distinctes.
 - L'une $K M$, nommée face, se mesure au-dessus du cercle primitif.
 - L'autre $M N$ est appelée flanc de la dent.

7. Largeur de la dent. C'est la largeur suivant une parallèle à l'axe de la roue.

8. Pas. C'est la distance de centre à centre de deux dents consécutives.

Le pas vaut aussi la largeur du creux plus l'épaisseur de la dent. Ces mesures sont toutes relevées sur le cercle primitif.

9. Jante. La partie ^{circulaire} marquée J est la jante (fig.25).

10. Moyeu. Le moyeu M est la partie centrale de la roue, un orifice central est alésé au diamètre de l'arbre qui porte la roue.

11. Bras. Les bras B reliant le moyeu à la jante. La section des bras est excessivement variable. On trouve aussi des engrenages où la liaison du moyeu à la jante est assurée par un voile plein qui est parfois allégé par une série de trous concentriques.

12. Remarques.

(X) fig 23

- a) Des raisons constructives limitent le minimum de dents à 11.
- b) Pour éviter une usure trop rapide des dentures, on adopte des engrenages dont les nombres de dents sont premiers entre eux. De cette façon les mêmes dents sont le moins souvent possible en contact, on obtient ainsi une usure la plus lente et la plus uniforme possible;
- c) Les sens de rotation de deux engrenages calés sur deux arbres parallèles sont inverses. Un simple croquis le prouve.
- d) Il est bon de ne pas dépasser pratiquement 8 comme rapport de transmission par engrenages cylindriques ou droits.

Relations liant certaines caractéristiques des engrenages.

1. Longueur de la circonférence primitive de ϕD ($\pi \times D$), pas p et nombre de dents Z.

Le pas est la distance de centre à centre de deux dents. Cette distance est mesurée sur la circonférence primitive (voir plus haut)

Cours 1203
6e et 7e leçons

La longueur de cette circonférence primitive a pour valeur : le pas p multiplié par le nombre de ces pas. Le nombre de pas est précisément égal au nombre de dents Z d'où :

$$p \times Z = \pi \times D$$

d'où $p = \frac{\pi \times D}{Z}$; $D = \frac{p \times Z}{\pi}$ et $Z = \frac{\pi \times D}{p}$

2. Pas diamétral ou module.

La relation $D = \frac{p \times Z}{\pi}$ peut aussi s'écrire :

$$D = \frac{p}{\pi} \times Z \quad (1)$$

$\frac{p}{\pi}$ ou le quotient du pas par π ($= 3.14$) est appelé pas diamétral ou module M. En remplaçant dans la formule (1) $\frac{p}{\pi}$ par sa valeur M, on a :

$$D = M \times Z$$

et

$$M = \frac{D}{Z}$$

Définition. Le module ou pas diamétral d'un engrenage a pour valeur, le quotient du diamètre primitif par le nombre de dents. Le module est aussi le nombre par lequel on doit multiplier le nombre de dents de l'engrenage pour obtenir son diamètre.

Application. Le pas circonférentiel d'un engrenage de 120 dents est de 47,10 mm. On demande de calculer son diamètre primitif, son module ou pas diamétral.

Solution. Données. $p = 47,10 \text{ mm.}$, $Z = 120 \text{ dents}$

Inconnues. D et $M = ?$

Formules. 1. Circonférence primitive = pas x nombre de dents
 $\pi \times D = p \times Z$

d'où $D = \frac{p \times Z}{\pi}$

2. Module = diamètre primitif divisé par le nombre de dents

$$M = \frac{D}{Z}$$

6.

Applications numériques.

$$1. \quad D = \frac{47,10 \times 120}{3,14} = \frac{5652}{3,14} = 1.800 \text{ mm. ou } 1,80 \text{ m}$$

$$2. \quad M = \frac{47,10}{3,14} = 15$$

Le diamètre primitif est donc 1.800 mm. et le module de l'engrenage est 15.

3. Nombre de tours - diamètres primitifs des engrenages.

Nous avons vu que deux engrenages roulent comme deux roues à friction ayant pour diamètres extérieurs les diamètres primitifs des roues dentées.

Dès lors, nous écrivons :

Loi. Dans la transmission par engrenages, les nombres de tours sont inversement proportionnels aux diamètres primitifs.

Application. Un moteur tourne à 1400 tours/min. et porte en bout d'arbre un pignon de $\phi 100$ mm., il commande la roue dentée d'un treuil qui doit tourner à 140 tours/min.

On demande le diamètre primitif de la roue dentée.

Solution. Données. $D_1 = 100 \text{ mm.}$
 $N_1 = 1400 \text{ tours/min.}$
 $N_2 = 140 \text{ tours/min.}$

Inconnue : $D_2 = ?$

Formules $\frac{D_1}{D_2} = \frac{N_2}{N_1}$
 $D_2 = \frac{D_1 \times N_1}{N_2}$

Application numérique.

$$D_2 = \frac{100 \times 1400}{140} = 1000 \text{ mm.}$$

Le diamètre primitif de l'engrenage devra donc être 1000 mm ou 1,00 m.

4. Nombre de tours - nombre de dents. Supposons une transmission d'un pignon de 20 dents et d'une roue dentée de 80 dents. Par un tour de pignon, soit une rotation de 20 dents, la roue dentée se déplace aussi de 20 dents, ce qui correspond à $\frac{20}{80}$ ou $\frac{1}{4}$ de tour.

Donc, quand la roue dentée (80 dents) parcourt 1 tour, le pignon de 20 dents a parcouru 4 tours. Nous pouvons écrire cette notion sous la forme générale:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Conclusion.

Dans une transmission par engrenages, les nombres de tours sont inversement proportionnels aux nombres de dents et réciproquement.

Problème. Un moteur tourne à 1400 tours/minute (N_1) et actionne l'arbre d'un ventilateur par l'intermédiaire d'un pignon de 20 dents (Z_1). Ce ventilateur doit tourner à raison de 350 tours/min. (N_2).

Rechercher le nombre de *dents* de la roue dentée à placer sur l'arbre du ventilateur.

Solution. Données. $Z_1 = 20$ dents.
 $N_1 = 1400$ tours/min;
 $N_2 = 350$ tours/min.

Inconnues. $Z_2 = ?$

Formule.
$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$Z_2 = \frac{N_1}{N_2} \times Z_1$$

Application numérique.

$$Z_2 = \frac{1400}{350} \times 20 = 80 \text{ dents}$$

Le ventilateur portera donc en bout d'arbre une roue dentée d'attaque de 80 dents.

8.

5. Distance d'axe en axe et diamètres. En examinant la figure 25, nous pouvons dire que la distance d'axe en axe des deux engrenages vaut $e = R_1 + R_2$ ou en fonction des diamètres,

$$e = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} \quad e = \frac{D_1 + D_2}{2}$$

Conclusion. La distance d'axe en axe vaut la demi-somme des diamètres primitifs.

6. Distance d'axe en axe et nombre de dents.

Distance d'axe en axe $e = \frac{D_1 + D_2}{2}$ (1)

Or, $D_1 = M \times Z_1$ (2)

et $D_2 = M \times Z_2$ (3)

D'où en remplaçant dans (1) D_1 et D_2 par leur valeur (2) et (3), on trouve

$$e = \frac{M \times Z_1 + M \times Z_2}{2} = \frac{M \times (Z_1 + Z_2)}{2}$$
$$= \frac{M}{2} \times (Z_1 + Z_2)$$

Conclusion. La distance d'axe en axe est égale au demi-produit du module par la somme des nombres de dents de l'engrenage et du pignon.

Problème. Un engrenage de $Z_1 = 75$ dents est commandé par un pignon de $Z_2 = 25$ dents.

On demande la distance d'axe en axe e de l'engrenage et du pignon sachant que leur module est 15.

Solution. Données : $Z_1 = 75$ dents; $M = 15$;
 $Z_2 = 25$ dents;

Indonnée : $e = ?$

Formule : $e = M \times \frac{(Z_1 + Z_2)}{2}$

Application numérique :

$$e = \frac{15 \times (75 + 25)}{2} = \frac{15 \times 100}{2} = \frac{1500}{2} = 750 \text{ mm.}$$

Cours 1203
6e et 7e leçons

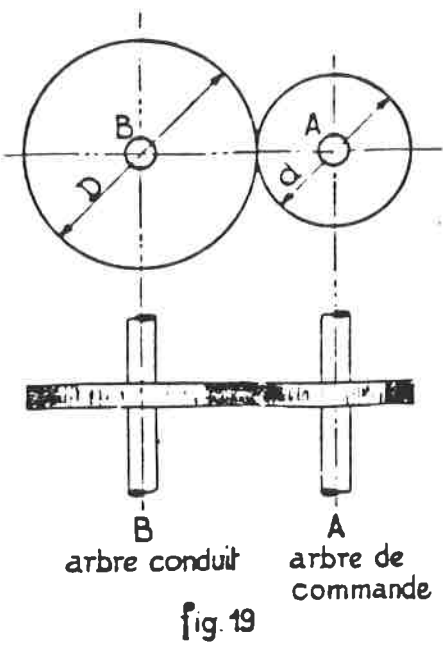


fig. 19

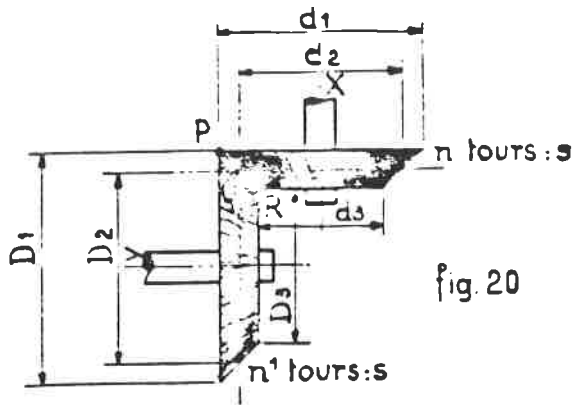


fig. 20

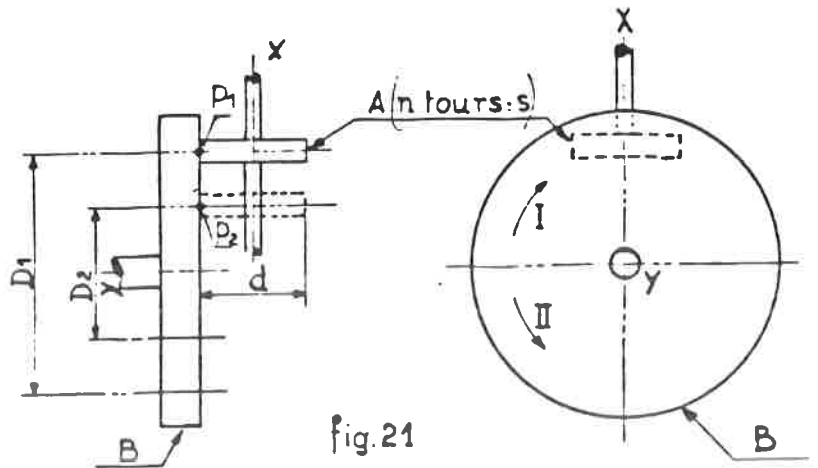


fig. 21

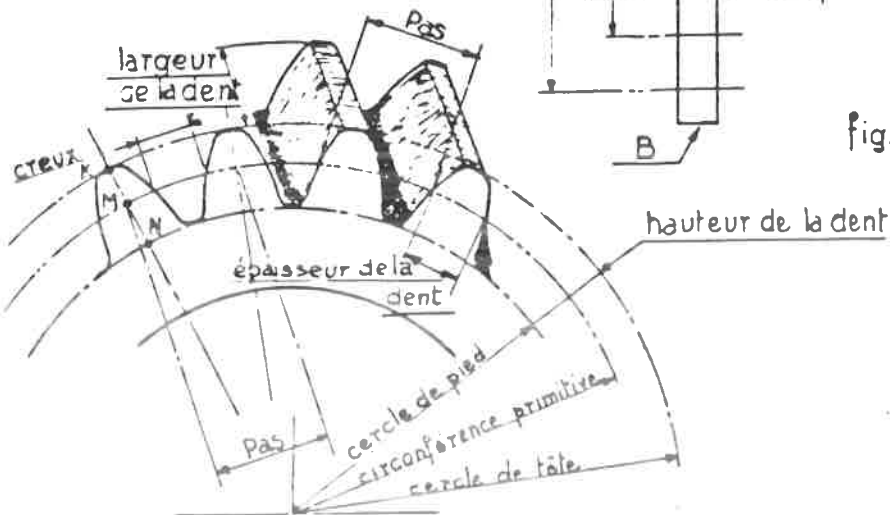


fig. 22



fig. 24

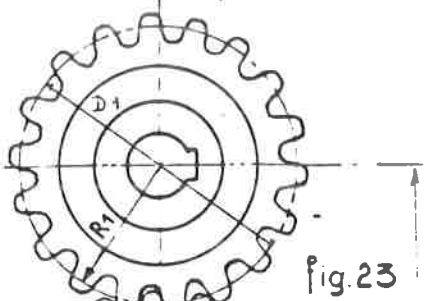


fig. 23

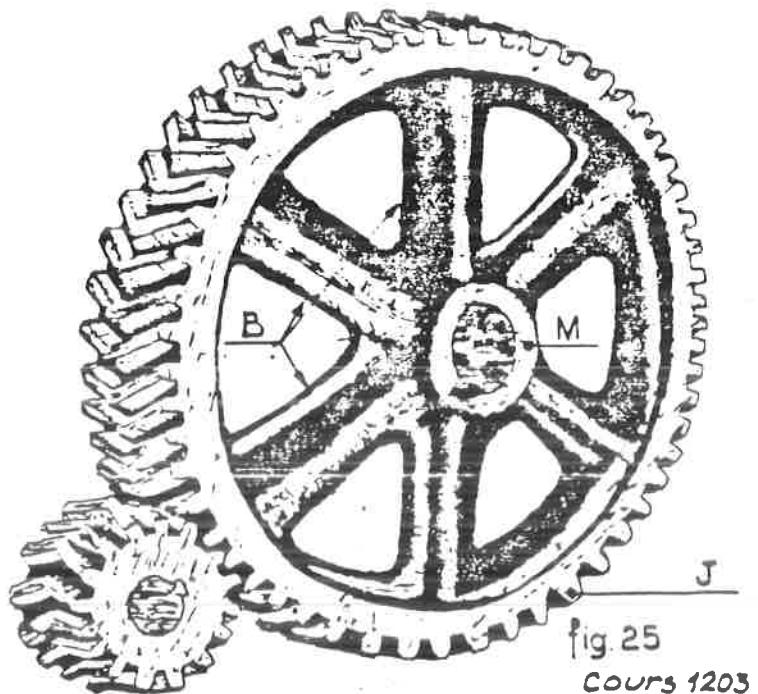
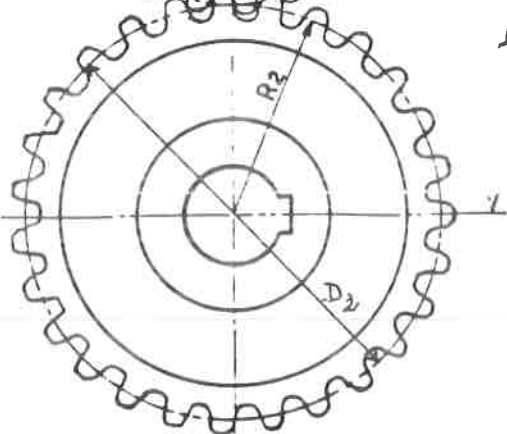


fig. 25

Cours 1203

6^e et 7^e Leçons

Chapitre 7 - Application industrielle de la cinématique (suite).7.1 Transmissions de mouvements circulaires (suite).7.1.2. Les arbres sont rapprochés (suite).2. Engrenages (suite).b. 2e cas. Les arbres sont perpendiculaires. Engrenages coniques.

La figure 26 nous indique le type d'engrenages utilisés; c'est le type conique. La figure 27 représente les plans des diamètres primitifs. La loi de la transmission du mouvement est la même que celle de la transmission par engrenages cylindriques ou droits.

Loi. Dans la transmission par engrenages coniques, les nombres de tours sont inversement proportionnels aux diamètres.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

Loi. Dans la transmission par engrenages coniques, les nombres de tours sont inversement proportionnels aux nombres de dents.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Remarque. Le rapport de transmission par engrenages coniques ne doit pas dépasser : 5.

c. 3e cas. Les arbres sont dans des plans perpendiculaires: Roue et vis sans fin.

Cette transmission se rencontre dans les treuils à commande électrique (ascenseurs), dans les réducteurs de vitesse (voir disposition schématique à la fig. 28).

Théorie élémentaire de la génératrice de la vis.1. Vis à une entrée.

Nous dessinons (fig. 29) un cylindre A B C D et un triangle rectangle A P E. Nous disposons le côté A P dans ^{de + D} dans lequel A P représente la longueur de la circonférence de diamètre D (soit πD)

le même plan que la base A B du cylindre. Nous enroulons ensuite le triangle A P E sur la surface latérale du cylindre A B C D. La ligne A E décrit une courbe dite "hélicoïde" ou "hélice".

C'est l'axe du filet que l'on obtiendrait en prenant le long de cette courbe un profil de dent.

La vis ainsi formée est dite : à une entrée, parcequ'elle est formée d'un seul filet. La roue qu'elle commande avance d'une dent à chaque tour de la vis. Le pas de la roue est mesuré par la distance d'axe en axe de deux filets consécutifs. Le pas de la roue vaut donc le pas de la vis.

2. Vis à deux entrées.

En rabattant simultanément sur le cylindre deux triangles F P E et A K F, on obtient deux hélices distinctes. La vis construite de cette façon est dite : "à deux filets" ou "à deux entrées". Pour un tour de cette vis, la roue avance de deux dents.

Le pas est mesuré ici par la distance de centre à centre du premier au troisième filet ou du deuxième au quatrième (voir fig. 30). Dans ce cas, le pas de la roue est égal à la moitié du pas de la vis.

L'angle α du triangle générateur A P E détermine l'inclinaison de la denture de la roue sur la jante.

Les transmissions à roue et vis sans fin exigent un bon graissage, car les frottements sont très importants. On enveloppe toujours ces mécanismes dans des boîtes remplies d'huile et hermétiquement fermées (carters).

1ère application. On désire commander un tambour de treuil (fig. 31) au moyen d'une roue à vis sans fin et d'un moteur électrique tournant à 1400 tours/min. Le tambour doit tourner à 70 tours/min. On demande le nombre de dents de la roue étant donné que la vis sans fin doit être à deux entrées vu l'importance de la charge.

Solution. Le rapport des nombres de tours est de

$$\frac{1400}{70} = 20.$$

La vis sans fin est à deux entrées.

Le nombre de dents de la roue = 2 entrées
x 20 = 40 dents.

2ème application. Une vis à une entrée tourne à 1000 t/m et commande une roue de 50 dents. On demande le nombre de tours/min. de la roue.

Solution. Pour un tour de la vis, la roue tourne de 1 dent.

Pour 1000 tours de la vis, ^{par min.} la roue tourne de 1000 dents ^{par min.}

La roue de 50 dents effectuera donc $\frac{1000}{50} = 20$ tours/minute pour les 1000 tours de la vis.

+ + +

7.2. Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne continu.

7.2.1. Transformation du mouvement par treuil.

Observons un treuil à tambour cylindrique (fig.32), le câble enroulé sur le tambour est animé d'un mouvement circulaire continu tandis que le seau que l'on élève dans le puits a un mouvement rectiligne continu.

Ces mouvements sont dits continus parce que leur sens reste le même pendant toute la durée du mouvement. Regardons le mouvement du câble, nous remarquons que le câble reste bien tendu. Pendant un même temps soit 1 seconde, le câble s'élève d'une quantité l_1 et pendant ce même

temps, il s'enroule de la longueur l_2 sur le tambour de treuil et $l_1 = l_2$.

La vitesse de levée du câble V_1 n'est autre que le déplacement l_1 pendant l'unité de temps. V_1 est donc égal à la vitesse circonférentielle V_2 d'un point de la jante des tambours. n représente le nombre de tours par seconde et N le nombre de tours par minute.

$$V_1 = V_2$$

$$V_2 = \pi \times D \times n \quad \text{ou} \quad \frac{\pi \times D \times N}{60}$$

$$\text{d'où } V_1 = \frac{\pi \times D \times N}{60}$$

Application. Un treuil électrique de la figure 33 commande un ascenseur. On sait que le nombre de tours du moteur est de 1400 tours/mⁿ. On demande la vitesse de la cabine.

4.

<u>Solution.</u>	Données	$N_1 = 1400 \text{ t/m}^2$
		$Z_1 = 15 \text{ dents.}$
		$Z_2 = 60 \text{ dents.}$
		$Z_3 = 18 \text{ dents.}$
		$Z_4 = 126 \text{ dents.}$

Formules. $\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$

Vitesse de l'arbre intermédiaire XX' : $N_2 = \frac{N_1 \times Z_1}{Z_2}$

ou, $N_2 = N_3$ *car c'est le même axe* & *autre part* : $\frac{N_3}{N_4} = \frac{Z_4}{Z_3}$

Vitesse de l'arbre du tambour YY' : $N_4 = \frac{N_2 \times Z_3}{Z_4}$

Vitesse de levée du câble ou vitesse de la cabine en m/s; cette vitesse est égale à la vitesse circonférentielle correspond^{ante} au nombre de tours : $m N_4$ du tambour de diamètre D.

$$V = \frac{\pi \times D \times N_4}{60}$$

Applications numériques.

$$N_2 = \frac{1400 \times 15}{60} = 350 \text{ tours/minute. } \text{ou } N_2 = N_3,$$

$$N_4 = \frac{350 \times 18}{126} = 50 \text{ tours/minute.}$$

La vitesse de la cabine sera donc :

$$V = \frac{3,14 \times 0,700 \times 50}{60 \text{ sec.}} = 1,83 \text{ m/s.}$$

7.2.2. Transformation du mouvement par crémaillère et pignon.

La fig. 34 représente la réalisation du dispositif. Ce mécanisme est adopté dans les tables roulantes des raboteuses, dans la commande des tables de machines à débiter la pierre, pour la manoeuvre des vannes.

Relation. Lorsque le pignon tourne d'un pas circonférentiel (une dent plus un creux), la crémaillère monte d'un pas.

A un tour du pignon correspond son nombre de dents Z. Selon le sens de rotation, la crémaillère s'est levée ou abaissée de ce nombre Z de dents.

Cours 1203
8e leçon

Application. Soit un système crémaillère-pignon; les caractéristiques du pignon sont : $Z = 12$ dents, module = 10. On demande le nombre de tours Y du pignon par une levée C de crémaillère de 942 mm.

Solution - Données - pignon $Z = 12$ dents
 $M = 10$
 crémaillère $C = 942$ mm.

Inconnue : nombre de tours Y du pignon
 pour la levée C .

Formules : pas circonférentiel : $P = M \times \pi$

Nombre de dents X correspondant à la levée complète C de la crémaillère $x = \frac{C}{P}$

Nombre de tours Y du pignon correspondant à C ; $Y = \frac{X}{Z}$

Application numérique : $P = 10 \times 3,14 = 31,4$ mm.

$$X = \frac{942}{31,4} = 30 \text{ dents.}$$

$$Y = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ tours.}$$

7.2.3. Transmission par vis et écrou.

1. Caractéristiques.

1. Une vis se compose d'un cylindre appelé cylindre générateur, âne ou noyau, qui porte un, deux ou plusieurs filets enroulés en hélice.
2. Les vis sont caractérisées par la forme du filet.
3. Si le profil du filet est triangulaire, la vis est appelée triangulaire. C'est ce genre de filet qui est utilisé pour les boulons d'assemblages ordinaires. Les systèmes de filets Whitworth, International sont de ce type (fig. 35).
4. Pour les vis utilisées pour transmettre des efforts élevés, on emploie une section carrée ou ronde. C'est le cas des vis d'attelage utilisées au matériel roulant (fig. 36).
5. On dit que les vis sont droites, si les filets vus de face montent vers la droite. Elles sont gauches dans le cas contraire.

2. Cas de transmission du mouvement par vis.

Il existe trois cas :

1er cas. La vis tourne, l'écrou est guidé et ne peut tourner.

Le résultat de la rotation de la vis est de communiquer à l'écrou un mouvement rectiligne continu.

C'est le cas de la rotation de la vis-mère d'un tour qui provoque le mouvement rectiligne continu du chariot.

Un autre cas plus particulier est celui des transporteurs par vis des brasseries et des fabriques de briquettes; la vis est alors formée par une hélice en tôle entourée d'une gaine. L'écrou est la matière à transporter.

La rotation de l'hélice conduit la matière d'une extrémité à l'autre de l'hélice.

Pour éviter l'engorgement, il est évident que la matière n'occupe pas toujours la totalité de la surface de la gaine.

2e cas. La vis est fixe, l'écrou tourne et peut se déplacer; c'est le cas courant des boulons d'assemblage.

3e cas. La vis tourne, l'écrou est fixe.

Le mouvement de rotation de la vis entraîne son mouvement rectiligne continu. C'est le cas des vis à métaux et à bois.

Problème. On demande le débit horaire de l'hélice de brasserie dont les caractéristiques sont :

Données : Diamètre $D = 600 \text{ mm}$.
 Pas de l'hélice = 500 mm .
 Vitesse = 1 tour : sec. soit : 3600 tours/h.

La matière à transporter occupe une surface dont la limite supérieure est à une distance $l = 50 \text{ mm}$. de l'axe horizontal (voir fig. 37).

Formules : $S = \frac{\pi \times D^2}{4 \times 2} - \frac{D \times l}{\text{approximativement}}$

Débit. Pour un tour de l'hélice, la matière chemine d'un pas, le débit par tour sera

$$S \times l \text{ pas}$$

Le débit par heure sera

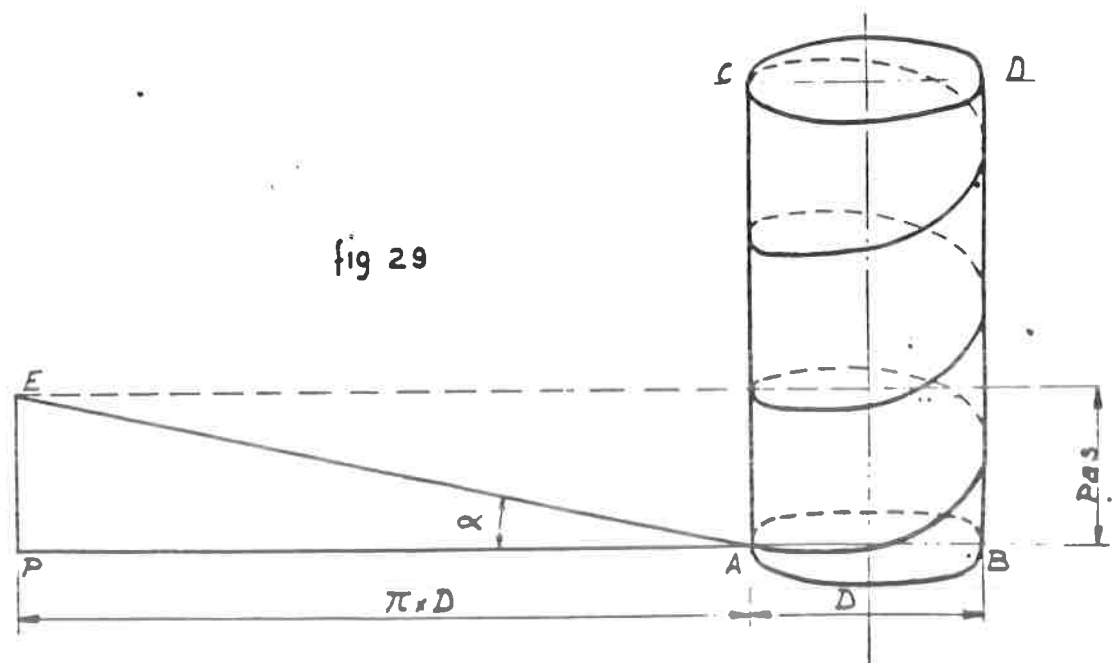
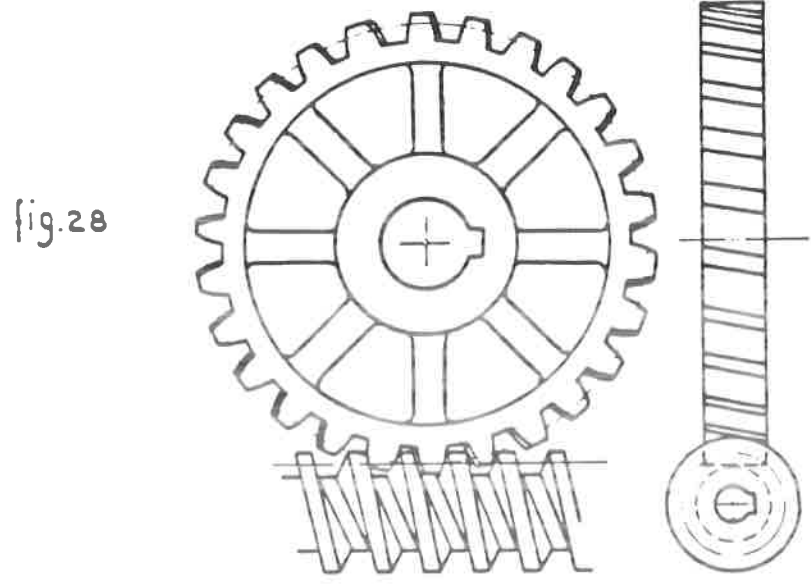
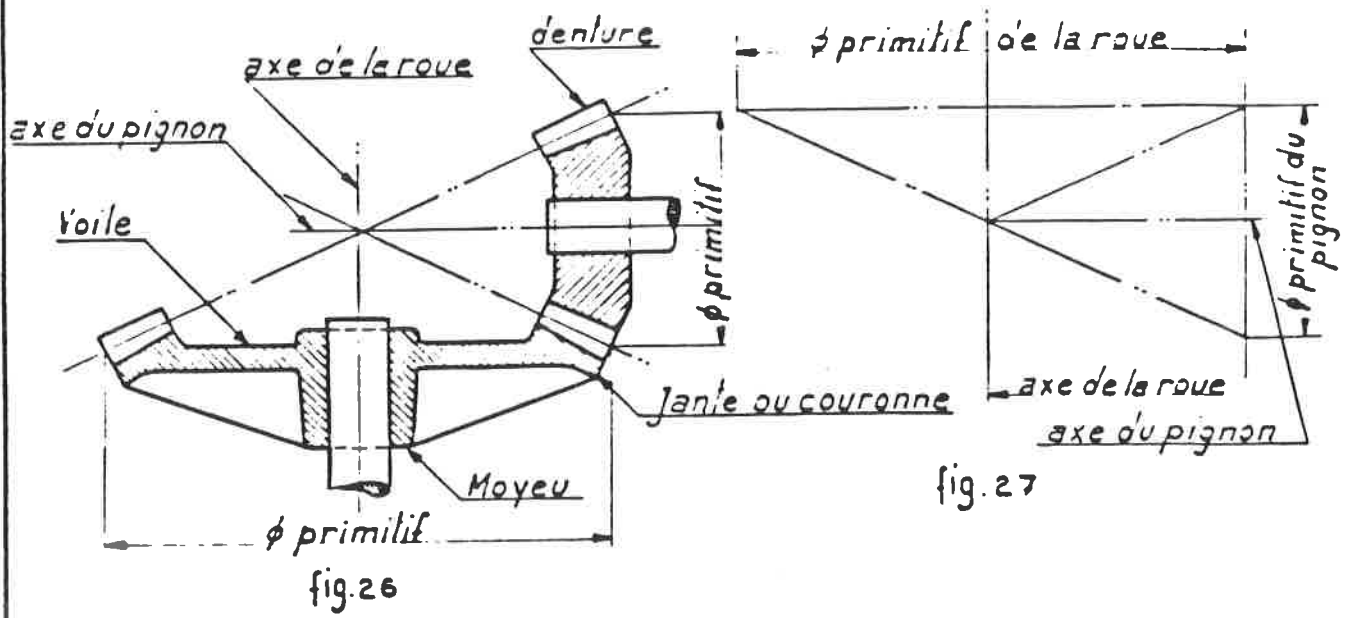
$$S \times l \text{ pas} \times \text{nombre de tours} : h$$

Applications numériques.

$$S = \frac{3,14 \times 0,6^2}{4 \times 2} - 0,6^m \times 0,05^m = 0,1113 \text{ m}^2.$$

Débit par tour : $0,1113 \times 0,5 = 0,05565 \text{ m}^3$.

Débit par heure : $0,05565 \times 3600 = 200,340 \text{ m}^3$.



(a) 289117. 10 65 (195)

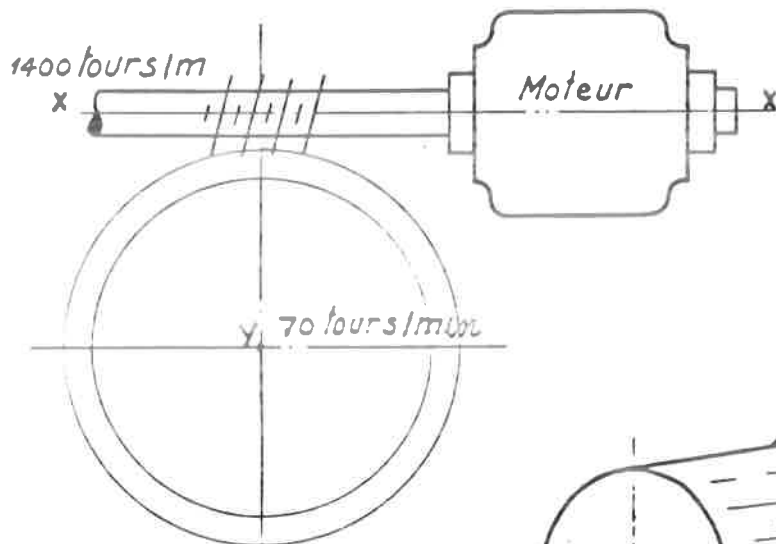
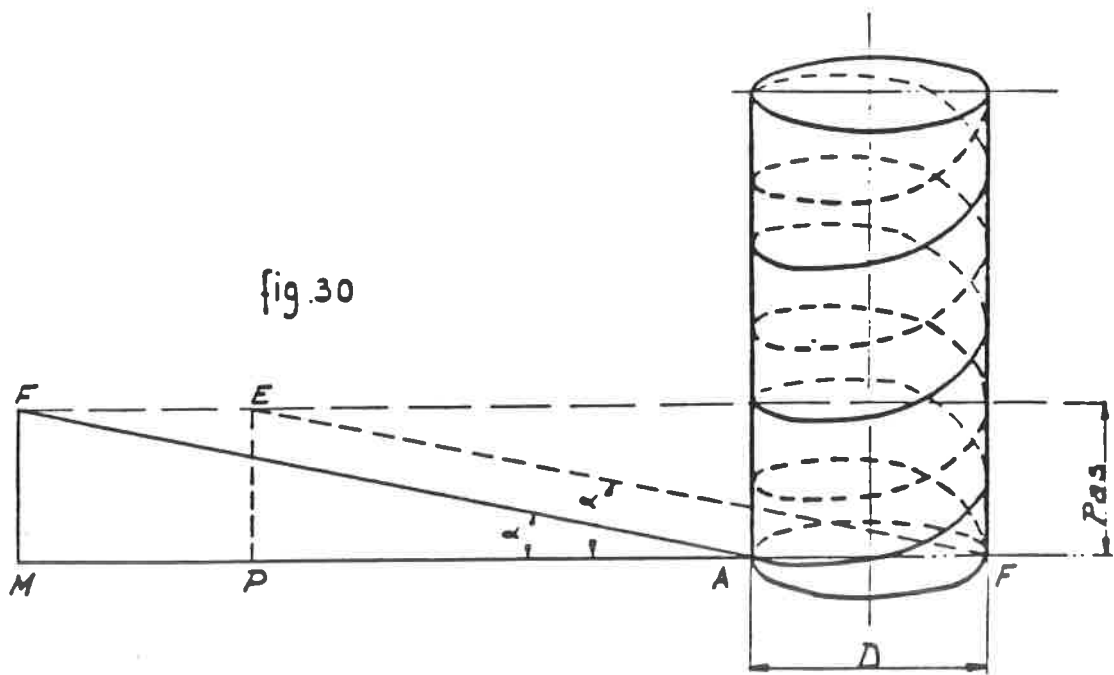


fig.31

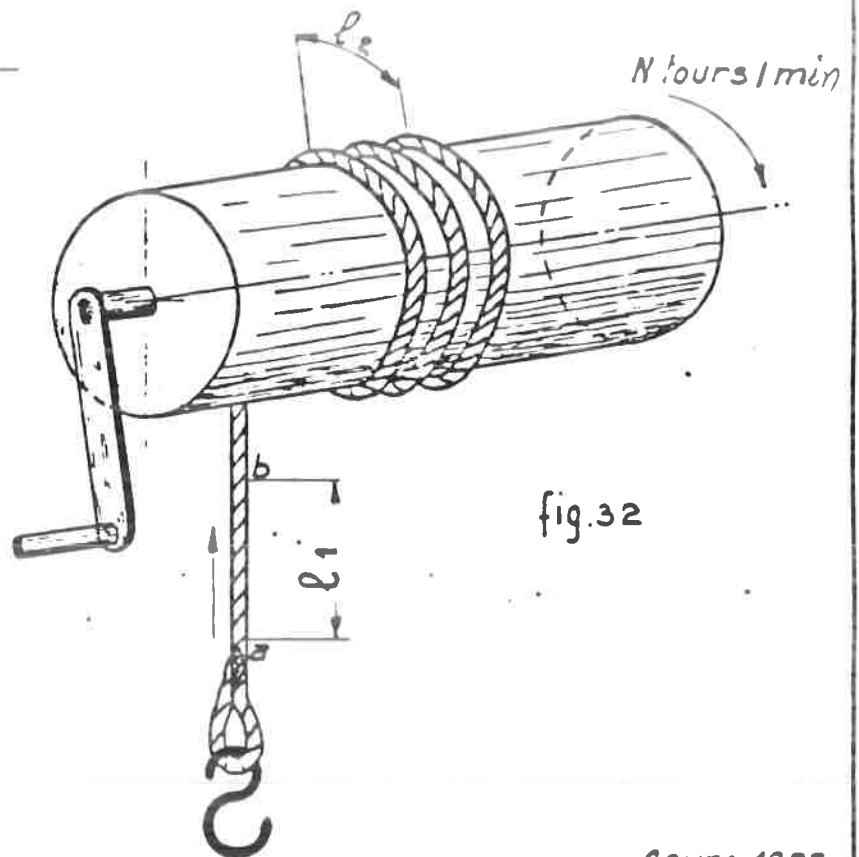


fig.32

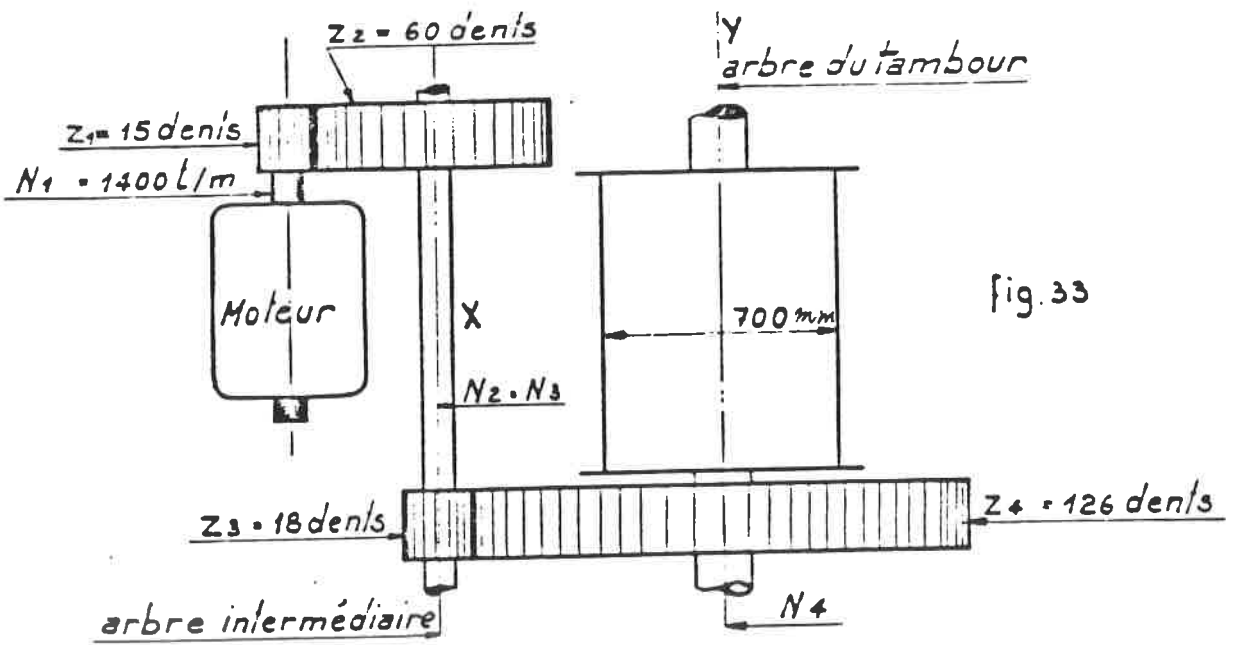


fig. 33

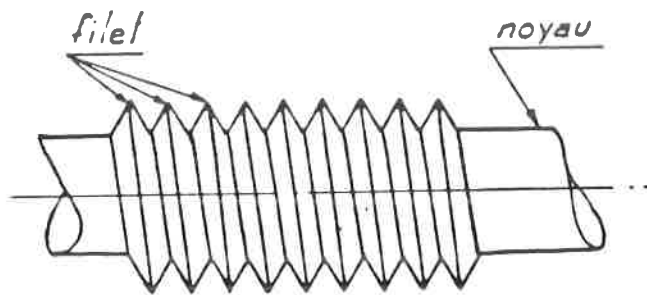
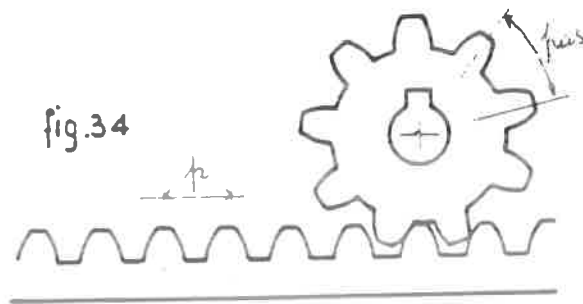


fig. 35

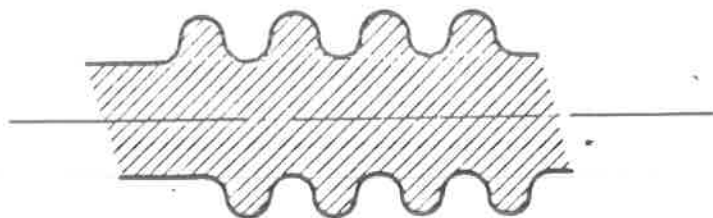


fig. 36

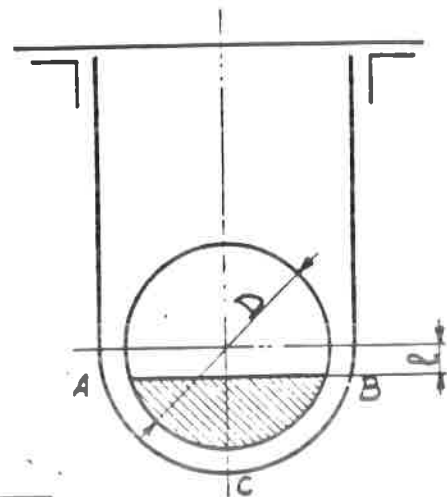


fig. 37

1ère Partie - La cinématique.

Chapitre 7. (suite)

7.3. Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement alternatif. et vice-versa.

7.3.1. Mécanisme manivelle, bielle, crosse.

Les applications de ce mécanisme sont bien connues: la machine à vapeur, les moteurs à combustion et les compresseurs (fig. 38).

Etude du mécanisme.

1. La manivelle.

La manivelle OB peut tourner autour d'un point fixe (centre) O. Le point B décrit une circonférence de centre O. Notons que la rotation peut s'exécuter dans 2 sens différents: on repère chaque sens d'après le sens de rotation des aiguilles d'une montre.

Un point quelconque pris sur la manivelle décrit aussi une circonférence de centre O.

Tous les points de la manivelle décrivent des circonférences de centre O.

Si nous faisons tourner la manivelle d'une façon régulière (30 tours / min par exemple) et dans le sens des aiguilles d'une montre:

Le mouvement de la manivelle est une rotation circulaire continue.

2. La crosse.

La crosse, qui est guidée entre 2 glissières fixes, décrit une ligne droite pendant que la manivelle tourne. Cette ligne est la trajectoire de la crosse.

Son mouvement change de sens puisqu'elle se déplace tantôt vers la droite, tantôt vers la gauche.

Un mouvement semblable est appelé discontinu ou alternatif.

Où change-t-il de sens ?

Faisons tourner très lentement la manivelle. La crosse se déplace en ce moment de la gauche à droite. Elle s'arrête en A2 et son mouvement va s'effectuer de la droite vers la gauche. A2 est un point extrême de la trajectoire de la crosse.

Au moment où elle atteint A2, la manivelle était horizontale. Elle occupait la position ON.

A chacune des positions extrêmes A1 et A2 de la crosse, correspond une position particulière M et N de la manivelle.

Dans la disposition du mécanisme de la fig. 38, la manivelle est horizontale en M et N. Une autre caractéristique de M et N est la position de la bielle qui se superpose à la manivelle en ces points.

M et N sont appelés points morts.

Quand la manivelle tourne de M à N, la crosse se déplace de A1 en A2. La manivelle a parcouru alors un demi-tour.

Lorsque la manivelle va de N en M, la crosse se déplace de A2 en A1, origine du mouvement.

Le mouvement de la crosse est un mouvement rectiligne alternatif.

Un trajet aller A1 A2 ou un retour A2 A1 est dénommé : une course de la crosse.

A une course de la crosse, correspond un demi-tour de la manivelle.

3. La bielle.

La bielle transmet le mouvement de la manivelle à la crosse. C'est la bielle qui transforme le mouvement de rotation continue de la manivelle en un mouvement rectiligne alternatif de la crosse.

Choisissons un point X quelconque de la bielle et en ce point, nous plaçons un crayon. Derrière la bielle, nous plaçons un papier fort sur lequel le crayon va tracer la trajectoire du point.

Faisons décrire à la manivelle un tour complet.

Regardons la ligne qu'a décrit le point. Ce n'est pas une ligne droite et ce n'est pas non plus un cercle. C'est une courbe que nous dirons quelconque.

Prenons un autre point de la bielle, nous trouvons une autre ligne de la même nature que la première. Un mouvement dont la trajectoire est quelconque est dénommé quelconque.

La bielle décrit un mouvement quelconque.

Aux machines à vapeur et moteurs à combustion interne, ce mécanisme est appliqué, mais alors c'est la crosse qui est commandée par le piston. C'est alors elle qui entraîne le mécanisme.

7.3.2. Excentrique.

Ce mécanisme comporte une poulie A calée excentriquement sur l'arbre X. Le centre de la circonférence de la poulie est O. La distance OX s'appelle le rayon d'excentricité (fig. 39).

M et N sont appelés les demi-colliers d'excentrique.

M est prolongé de la bielle de commande appelée barre d'excentrique.

Cette barre peut venir d'une pièce avec le demi-collier M ou être assemblée/boulons à celui-ci.
par

Les excentriques sont utilisés lorsque la course est réduite.

On trouve leur application dans la commande des tiroirs de distribution des machines à vapeur.

Notons que l'excentrique dérive du mécanisme bielle-manivelle.

En effet, tout se passe comme si OX était une petite manivelle qui commanderait directement la bielle qui est ici la barre d'excentrique.

Contrairement au mécanisme bielle-manivelle, l'excentrique n'est pratiquement pas réversible.

En effet, les frottements importants résultant de la pose des surfaces des colliers sur la poulie entraîneraient des échauffements.

7.3.3. Cames.

1. Description d'une came.

Les cames sont composées d'un galet g (fig. 40). Ce galet reste immobile et roule tant qu'il est en contact avec la partie circulaire de la pièce C qui est animée d'un mouvement circulaire continu autour de son axe X .

Cette pièce C est appelée came proprement dite.

Dès que la partie excentrée ou bossage de la came vient en contact avec le galet, celui-ci se soulève et entraîne la tige t dans un mouvement ascendant.

Le déplacement se poursuit jusqu'au moment où le point P est en contact avec le galet.

A partir de ce moment, la tige est animée d'un mouvement descendant.

Le mouvement de rotation continu de la came a donc provoqué un mouvement rectiligne alternatif de la tige.

On trouve l'application des cames dans la commande des soupapes de distribution de certaines machines à vapeur et de moteurs à gaz.

On les rencontre aussi dans le mécanisme de certaines machines-outils.

2. Tracé d'une courbe de came connue.

Pour tracer la courbe d'une came donnée (fig. 41), on divise le moyeu de la came en un certain nombre de parties égales; supposons 16 parties.

Sur une horizontale prenons une longueur AB égale à la longueur développée de la circonférence du moyeu de diamètre D .

Nous savons que le galet ne se déplace pas tant qu'il est en contact avec la partie cylindrique de la came soit dans la partie 6, 5, 4, 3, 2, 1, 16, 15, 14, 13, 12. Lorsque le galet occupe une position qui fait coïncider le rayon $O7$ avec l'axe XY horizontal, le galet se soulève de $7-7'$.

Lorsque le rayon $O\ 8\ 8'$ atteint XY , la roue g se soulève de $38'$.

Pour trouver la courbe des espaces de ce mouvement, nous portons sur la ligne AB et verticalement:

à partir du point 7, la longueur 7-7';
 " 8, " 8-8';
 " 9, " 9-9';
 " 10, " 10-10';

En joignant tous ces points: 6, 7', 8', 9', 10', 11' et 12, nous obtenons la courbe développée des hauteurs de levée du galet pour les différentes positions de la came.

La hauteur de levée de la roue g dépend de la distance 9-9'. Il suffit donc de faire varier cette distance pour une hauteur de levée de la came.

Des points 1 à 6 et de 12 à 1, le diagramme se confond avec la ligne AB . Pourquoi? Entre ces points, le galet g ne se lève pas. La courbe des hauteurs de levée est appelée aussi développement de la came.

3. Recherche du profil de came susceptible de produire un mouvement rectiligne alternatif dont la course est imposée.

Supposons la courbe $A9'B$ qui représente la loi des espaces du mouvement de la came (fig. 42).

Divisons la distance AB en parties égales, soient 16 par exemple; on trouve les points 2, 3, 4 16 et élevons des perpendiculaires en chacun de ces points; les points 2', 3', 4' 16' apparaissent.

D'autre part, nous traçons une circonférence de centre O et dont le diamètre approximatif D correspond à une longueur de circonférence égale à AB ; $D = \frac{AB}{\pi}$.

Divisons cette circonférence en un même nombre de parties égales que AB et traçons les rayons correspondants; prolongeons-les au-delà de la circonférence et partons sur ceux-ci les distances 2-2', 3-3', 4-4' ... égales aux longueurs correspondantes du développement.

Nous trouvons ainsi les points 2', 3', 4' que l'on joint et nous obtenons le profil de la came cherchée.

Par sa forme, cette came est appelée "came en coeur".

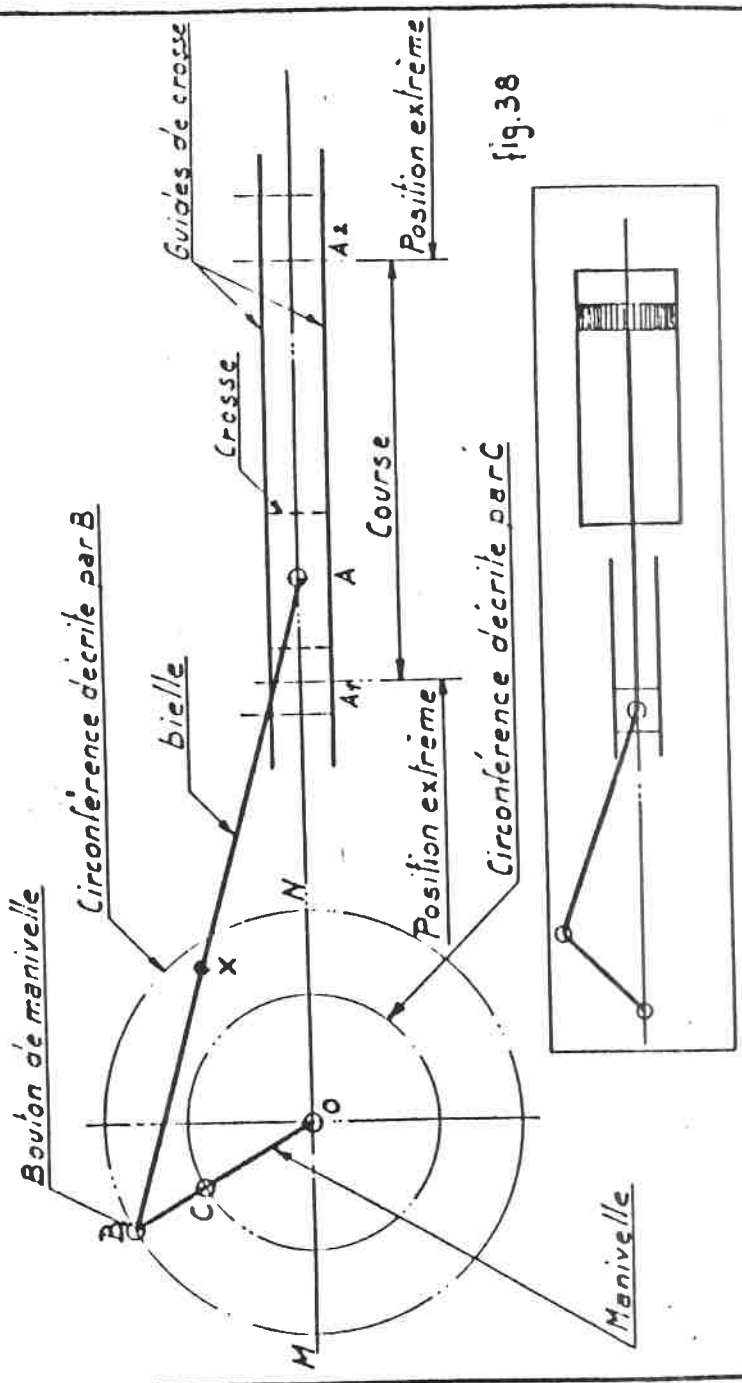


fig.38

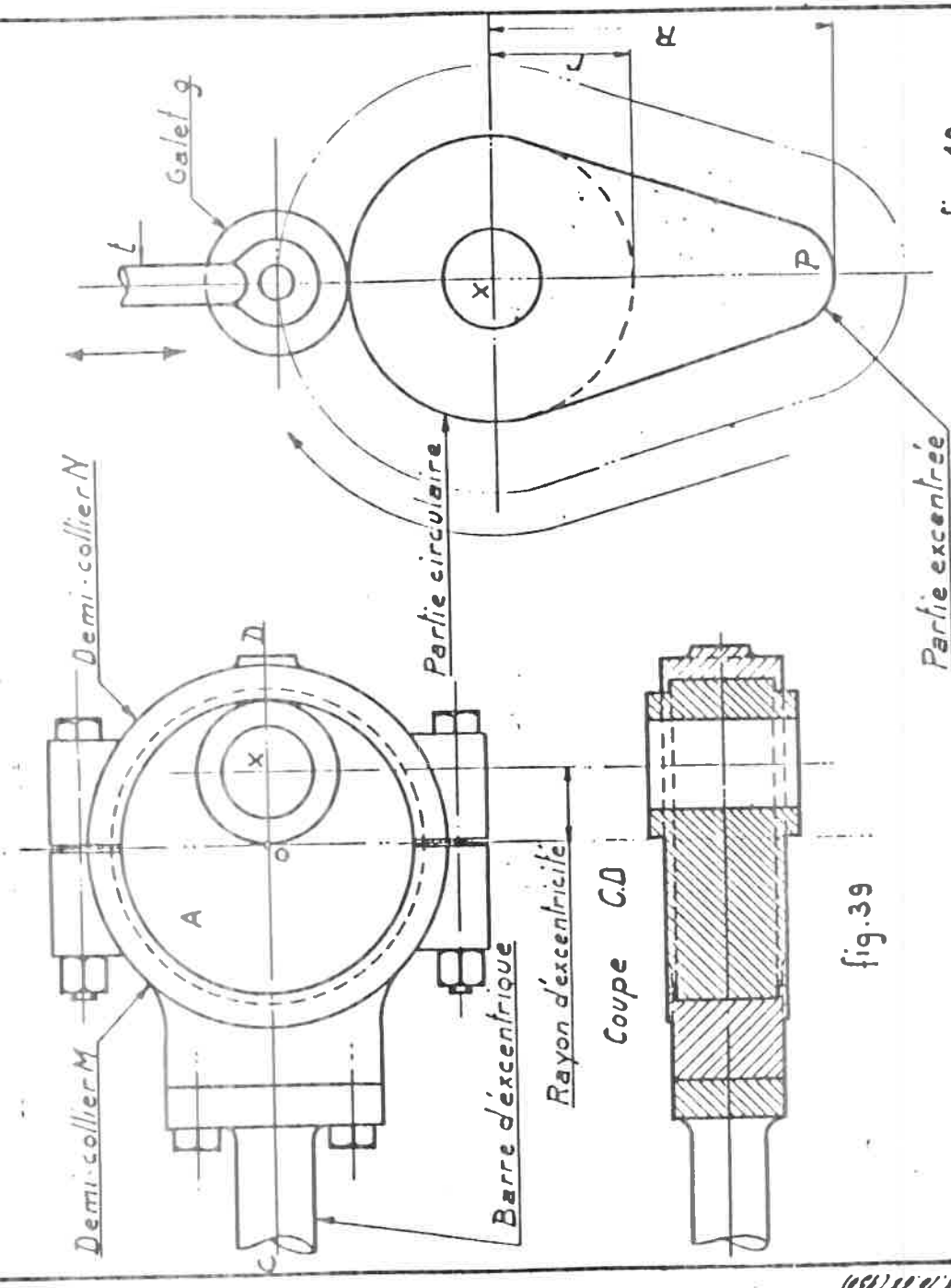


fig.39

Partie excentrée

fig. 40

Cours 1201

La présente leçon fera l'objet d'exercices pratiques et oraux dispensés par le professeur.

Cours 1201

La présente leçon fera l'objet d'exercices pratiques et oraux dispensés par le professeur.

2ème Partie.

LA STATIQUE.

CHAPITRE I : GENERALITES - LOIS

1.1 Les différents mouvement d'un corps.

Au début du chapitre traitant de la cinématique nous avons démontré que les états de repos et de mouvement étaient 2 notions relatives. En pratique nous nous référons toujours à un point fixe de la terre pour dire d'un corps s'il est en repos ou en mouvement.

Nous rencontrerons donc 2 formes de mouvement.

Si nous posons une boussole de façon arbitraire sur une table, l'aiguille de celle-ci marquera la direction Nord-Sud. Si nous déplaçons la boussole, l'aiguille aimantée indique toujours la même direction. Un mouvement de ce type se nomme TRANSLATION ou encore glissement.

Si nous observons maintenant l'induit d'un moteur électrique nous constaterons un mouvement de ROTATION ou encore mouvement circulaire.

On dit d'un corps qu'il est en translation lorsque chacun de ses points se déplacent au même instant à la même vitesse (sens et grandeur). Chaque point se déplace donc sur des trajectoires parallèles. Celles-ci peuvent être droites ou avoir des formes quelconques. Dans chacun de ces deux cas, le corps se déplacera sans tourner. Le mouvement de translation d'un corps est donc complètement défini par la vitesse du vecteur d'un point quelconque de ce corps (fig. 92 a). La valeur et le sens de cette vitesse peuvent naturellement varier dans le temps.

Lors de la rotation, les différents points en mouvement décrivent des formes circulaires (fig. 92 b). Tous les cercles décrit se trouvent dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation. La vitesse d'un point est ici proportionnelle à la distance qui sépare ce point de l'axe de rotation. Le mouvement de rotation est complètement défini par la position de l'axe de rotation et par la vitesse angulaire α .

Un corps peut simultanément se composer d'un mouvement de translation et de rotation. De cette façon, nous sommes face à un mouvement QUELCONQUE. Inversément, un mouvement quelconque peut se décomposer en un mouvement de translation et de rotation. Si ces deux formes de mouvement sont inexistantes, on dit d'un corps qu'il est au repos.

2.

1.2 Equilibre d'un corps.

Un livre sur la table reste immobile, il est à l'état de repos. Un wagon peut être lancé sur une voie plane. Il sera en mouvement. Il en sera de même pour un induit de moteur ou pour une roue de vélo lancée sur la route. Le livre n'a donc aucun mouvement, le wagon uniquement un mouvement de translation, l'induit un mouvement de rotation et la roue de vélo une combinaison de mouvement de rotation et de translation. Des 4 cas précités, le corps est soit en mouvement soit au repos. Mais le frottement mis à part, ces corps ne modifient pas leur état. On dit qu'ils sont en équilibre.

Un corps est donc en équilibre lorsque ses paramètres de mouvement ne sont pas modifiés. Est donc en équilibre :

- 1° Un corps au repos et qui le reste;
- 2° Un corps uniquement soumis à un mouvement de translation invariable;
- 3° Un corps uniquement soumis à un mouvement de rotation invariable;
- 4° Un corps soumis simultanément à un mouvement de translation et de rotation mais ces deux mouvements étant invariables.

EQUILIBRE = Non modification de l'état de mouvement ou de repos

1.3 L'inertie ou première loi de newton.

La mécanique élémentaire est fondée sur 3 lois qui ont été formulées par NEWTON. Elle ont un caractère tel que l'on peut les démontrer par des expériences physiques.

La première loi concerne l'équilibre des corps et peut être définie comme suit :

Un corps ne peut de lui même modifier son état de mouvement, il est donc INERTE.

Cela signifie que si aucune action n'intervient sur ce corps, son état de mouvement ou de repos ne sera pas modifié. Donc un corps livré à lui-même, qui ne subit aucun effet extérieur est en équilibre. C'est le cas des quatre objets cités ci-dessus : un livre sur la table, le wagon, l'induit de moteur et la roue de vélo. Abstraction toujours faite du frottement, aucun effet n'est exercé sur l'état de mouvement du corps. Si cette situation de mouvement est effectivement modifiée, c'est qu'une cause à cette modification se trouve dans l'entourage du corps. Sur un corps en équilibre, il ne s'exerce donc aucune force, ou alors s'exercent sur ce corps plusieurs forces mais celles-ci s'équilibrent entre elles et ont donc une résultante nulle. Par exemple, une mongolfière qui est immobile dans l'air est en équilibre car elle

est soumise à 2 forces qui s'équilibrent. Ces forces sont d'une part le poids de la mongolfière et d'autre part la force ascensionnelle créée par l'air chaud situé dans l'enveloppe formée par la toile.

Une force trouble l'équilibre d'un corps autrement dit vainct son inertie. Inversément, un corps non en équilibre (sur lequel une seule force s'exerce par exemple) peut retrouver sa position d'équilibre en y ajoutant une force qui annule l'effet de la première.

1 ère loi de newton : Les corps sont inertes. Sous l'influence venant de l'extérieur, leur situation de repos ou de mouvement ne sera pas modifiée.

1.4 Notions de la force:

Si nous voulons déplacer un objet, un livre par exemple, il faudra pousser sur celui-ci. C'est-à-dire qu'il faudra y exercer une certaine force. Il y a donc une cause au déplacement.

Pour tous les objets au repos, un certain effort les met en mouvement.

Un train lancé ralentit parce que les blocs de frein exercent un effort sur les roues. Cet effort est la cause du ralentissement. Le train était en mouvement. Un effort a modifié ce mouvement. La vitesse a diminué.

LA "FORCE" EST L'ACTION MECANIQUE QUI A POUR EFFET DE MODIFIER L'ETAT DE REPOS OU DE MOUVEMENT D'UN CORPS OU DE PROVOQUER SA DEFORMATION.

1.5 Caractéristiques des forces.

Une force est définie par quatre caractéristiques :

* Le point d'application :

Lorsque nous poussons ou tirons sur une table pour la déplacer, l'endroit où nous appliquons l'effort nécessaire est appelé : POINT D'APPLICATION.

* La direction ou ligne d'action :

Lorsque nous voulons déplacer la table dans une certaine direction, nous devons également exercer la force dans cette même direction. Si nous modifions la DIRECTION de la force, nous modifions également celle de la table.

* Le sens :

Une force qui agit suivant une certaine direction, peut travailler dans les DEUX SENS. Dans notre exemple, la table peut être soit poussée soit tirée dans une même direction.

4.

* L'intensité, la grandeur :

L'INTENSITE de la force avec laquelle on va déplacer la table peut varier à tout moment. Plus grande sera la force, plus grande sera la vitesse de déplacement de la table.

1.6 La pesanteur :

Sur tous les corps, qu'ils soient au repos ou en mouvement, s'exerce une force. C'est la pesanteur qui tend à attirer les corps vers le centre de la terre. C'est cette force qui doit être vaincue par nous si nous voulons soulever un fardeau. Cette force s'appelle le poids du fardeau.

La direction de cette force est toujours verticale et son sens est toujours dirigé vers le bas.

Son point d'application sera étudié plus loin. (voir centre de gravité)

1.7 Représentation d'une force.

* Les quatre caractéristiques citées ci-avant peuvent être représentées par un VECTEUR.

* Le point O est le point d'application. La force agit suivant la direction D.

Le sens est défini par la flèche. La grandeur de la force est représentée par la longueur du segment OE. Pour ce point, nous devons choisir une échelle représentative (par exemple : 1cm ÷ 10 Newton)

* La force est une unité VECTORIELLE, c'est-à-dire qui peut être représentée par un vecteur (grandeur, sens et direction). Contrairement, les unités telles la longueur, la surface, le volume la charge électrique, etc.....sont parfaitement définies par leur grandeur. On parle de grandeurs scalaires.

1.8 Unité des forces.

L'unité des forces est le NEWTON (en abrégé : N) Nous reviendrons sur ce point plus loin. Une autre unité très utilisée est le daN. (décanewton).

$$1 \text{ daN} = 10 \text{ N}$$

1.9 La mesure des forces.

Les forces peuvent être mesurées à l'aide d'un dynamomètre. Il en existe de différents modèles que nous allons décrire ci-dessous. Tous ces appareils fonctionnent sur le même principe de base. C'est à-dire la déformation élastique du ou des ressorts de l'appareil.

Cette déformation élastique est proportionnelle aux efforts appliqués jusqu'à une certaine limite que l'on ne dépasse pas. Lorsqu'on ne dépasse pas cette limite, le ressort reprend sa forme initiale quand la force cesse d'agir. Ces appareils sont gradués à l'aide de forces connues (1 fois, 2 fois, 3 fois l'unité)

* Dynamomètre Leroy (fig.93)

C'est celui connu de tous. Un cylindre C avec un couvercle A qui sert de boîte à ressort. Un ressort à boudin R est formé par un fil d'acier enroulé en hélice. Il se comprime entre le couvercle A du cylindre et le plateau B portant l'index I solidaire de l'anneau de fixation. La force ou la charge à mesurer est suspendue au crochet K. Elle entraîne le corps de l'appareil et comprime le ressort. La graduation qui figure sur le corps se déplace par rapport à l'index gradué I. Il existe des variantes de l'appareil en ce sens que parfois le cylindre reste fixe, alors c'est la tige et le piston qui se déplacent sous l'action de la force. Dans d'autres cas, le ressort travaille à l'extension et non à la compression.

* Le peson. (fig.94)

Le peson se compose :

- a) D'une lame L, en acier à ressort, trempé;
- b) D'un secteur gradué S1, fixé en A à la lame L. Ce secteur S1 se termine par un orifice dans lequel on a placé le crochet E auquel on applique la force ou le poids à mesurer;
- c) D'un secteur S2 qui est fixé à la branche inférieure mais peut coulisser dans la branche supérieure. L'extrémité de ce secteur se termine par un anneau F qui est destiné à supporter l'appareil.

* Dynomomètre de Poncelet. (fig.95)

Deux ressorts à lames R1 et R2 sont entretoisés par des anneaux B1 et B2; on maintient l'appareil par E; la force F agit au crochet C et déforme les ressorts R1 et R2. La déformation des ressorts est mesurée sur un curseur C (L1 est solidaire de R1 et L2 de R2).

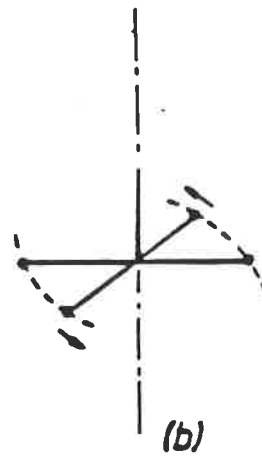
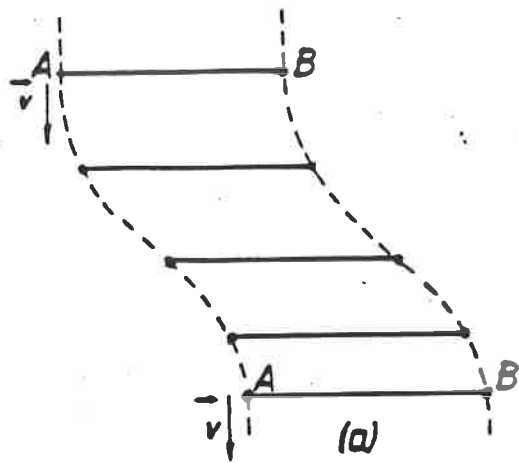


Fig. 92

Fig. 93

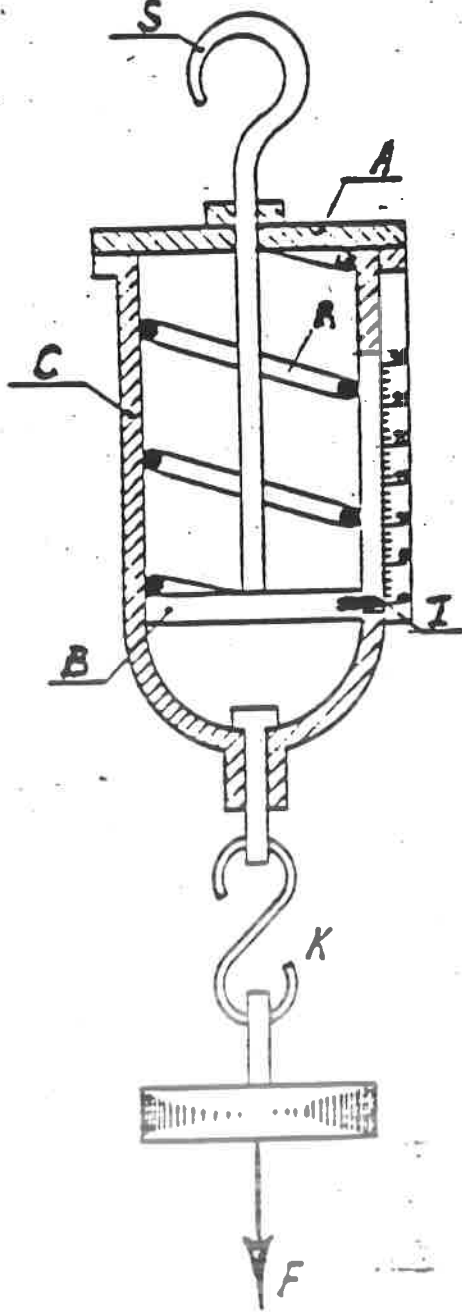


Fig. 94

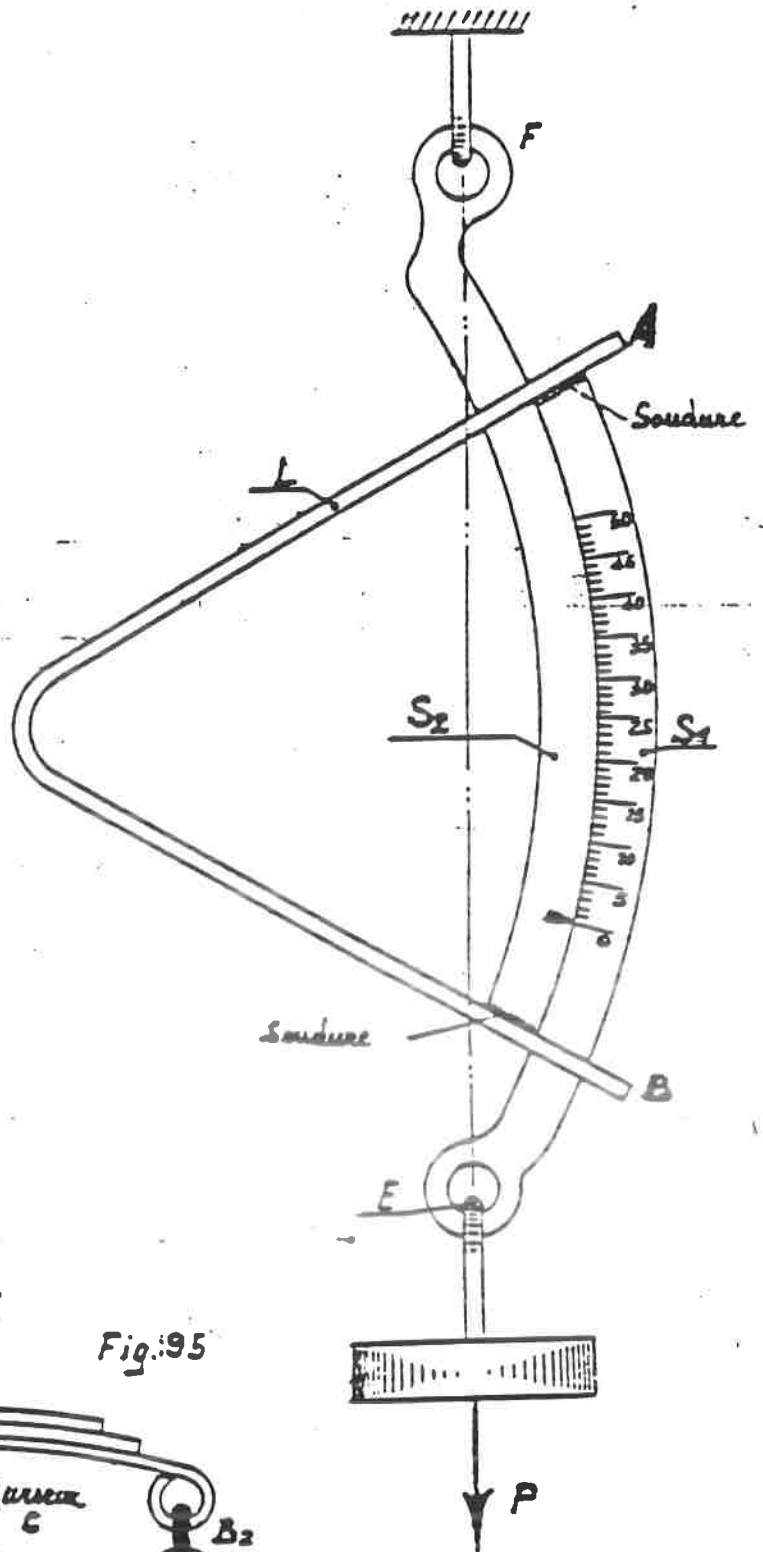
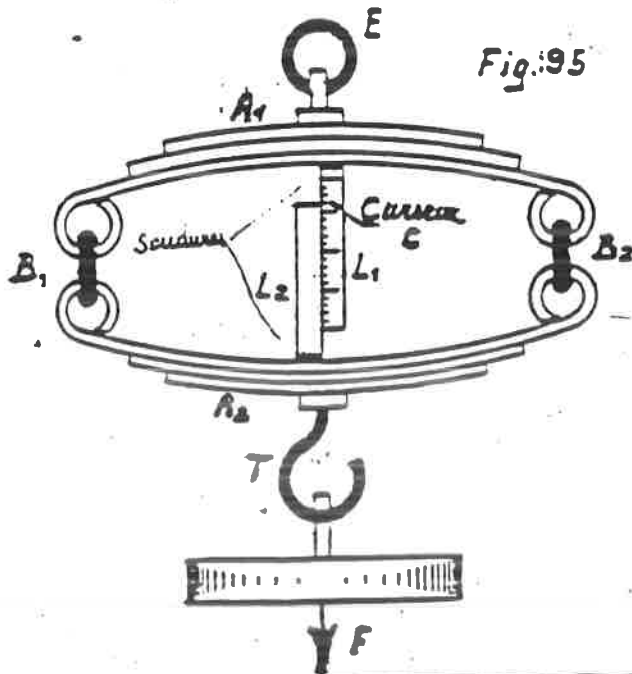


Fig. 95



ib. 181177. n. 63 (300)

C 1203
1989 / 12

Cours 1203

1.10 Deuxième loi de Newton. Loi fondamentale de la dynamique.

Cette loi sera ultérieurement étudiée en détail dans la partie consacrée à la dynamique. Provisoirement, nous retiendrons que celle-ci est en relation avec la force et l'accélération.

Si nous exerçons sur un corps de masse m un effort F , celui-ci prendra une accélération a . De cette expérience, nous pouvons retirer la loi fondamentale qui suit :

$$F = m \cdot a$$

La force est donc à l'origine du déplacement de ce corps.

1.11 Troisième loi de Newton. Action égale réaction.

* Nous allons attacher le bout d'une corde à un oeillet fixé dans un mur. Par l'autre bout de cette corde nous allons tirer avec une force F_1 . Il y a EQUILIBRE. Le système reste en place, rien ne bouge. En effet, le mur exerce une force F_2 de même valeur que F_1 . Cette force F_2 est donc de même intensité et de même direction que la première mais de SENS opposé. On dit de la force F_1 qu'elle est ACTIVE et de la force F_2 qu'elle est REACTIVE.

* Un corps A se trouve à l'état de repos sur un support B (voir fig.96). En raison de son poids, le corps exerce sur le support B une force F . Inversément, le support B exerce lui aussi, une force F' sur A. Sous l'influence de ces deux forces, le corps A est en équilibre.

* Un poids est suspendu à un câble (voir fig.97). Le poids exerce une force G active sur le câble. Pour conserver l'équilibre, le câble devra réagir en sens inverse avec la même intensité. C'est la réaction S . Le même principe est d'application pour les efforts situés au niveau du crochet C où la force active S' est cette fois égale à la force réactive F .

* En conclusion :

Quand un corps exerce un effort F sur un autre corps, ce dernier exerce lui aussi sur le premier un même effort F' , de même direction mais sens contraire. Sur un corps en EQUILIBRE, il doit agir au minimum 2 forces. Celles-ci s'appellent respectivement l'ACTION et la REACTION.

CHAPITRE II : COMPOSITION ET DECOMPOSITION DES FORCES .

2.1 Introduction.

* Par COMPOSITION de forces, on entend le remplacement de différentes forces par une autre, qui à elle seule a le même effet que toutes les autres réunies. Cette force de remplacement est nommée : RESULTANTE.

- La fig. 98 nous montre que les forces F1, F2, et F3 peuvent être remplacées par la force R. Celle-ci agit suivant une direction bien déterminée et donne la même indication sur le dynamomètre.

- La fig. 99 présente deux efforts parallèles F1 et F2 qui peuvent être remplacés sur la barre par une force R placée à un endroit tel que les indications D1 et D2 soient les mêmes qu'auparavant avec les efforts F1 et F2.

* A l'inverse de ce qui vient d'être dit, on entend par DECOMPOSITION d'une force R la formation d'un système de plusieurs forces F1, F2, F3 etc... qui à lui seul aura le même effet que la force R avant sa décomposition. Les forces F1, F2, F3, etc... auront pour nom COMPOSANTES.

- La fig. 100 nous fait découvrir une force P qui se décompose en deux autres forces dont les valeurs peuvent être lues sur les dynamomètres D1 et D2. Ces deux forces ont pour direction AC et BC. Si nous augmentons l'angle α (le poids P restant le même), nous pouvons constater que les valeurs lues aux dynamomètres vont également augmenter.

- La fig. 101 nous montre une force P qui se décompose en 2 forces parallèles et dont les valeurs peuvent également être lues sur les dynamomètres D1 et D2.

*Remarque :

- La fig. 102 nous indique que le point d'application d'une force F1 peut être déplacé sur la ligne d'action de la force sans pour autant que l'indication au dynamomètre D ne soit modifiée. Nous pouvons donc citer un principe important :

ON PEUT DEPLACER LE POINT D'APPLICATION D'UNE FORCE SUR SA LIGNE D'ACTION SANS EN MODIFIER SON INTENSITE.

2.2 Forces concourantes.

2.2.1 Résultante de 2 forces concourantes (fig.103)

- Méthode graphique :

La résultante d'un système de 2 forces concourantes F1 et F2 (voir également leçon 2) est donnée par la diagonale du parallélogramme construit à partir de ces 2 composantes.

$$\vec{R} = \vec{F1} + \vec{F2}$$

Si les deux composantes sont représentées à une certaine échelle et que par la suite on construit le parallélogramme, la diagonale représentant la résultante sera également à l'échelle. Le parallélogramme fera également apparaître la direction et le sens de la résultante.

-Méthode analytique :

Nous pouvons également par cette méthode, calculer la valeur ainsi que déterminer la direction de la résultante. Si α est l'angle formé par les 2 forces F_1 et F_2 , alors dans le triangle ABD on peut déduire ce qui suit

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD}$$

Si nous posons $BD = F_2$, l'angle $\widehat{ABD} = 180^\circ - \alpha$ et $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ nous obtenons :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha$$

La direction de la résultante R est donc en relation avec les lignes d'actions F_1 et F_2 et peut être définie par la règle sinus. Appliquée au triangle ABD, cette règle donne :

$$\frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \delta} = \frac{F_2}{\sin \beta}$$

ou $\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{F_1}{\sin \delta} = \frac{F_2}{\sin \beta}$

d'où $\sin \beta = \frac{F_2}{R} \cdot \sin \alpha$

$\sin \delta = \frac{F_1}{R} \cdot \sin \alpha$

N.B. : Lorsque, dans le texte, nous rencontrons le signe δ , celui-ci se traduit dans les figures par γ

-Si $\alpha = 0^\circ$:

= +1

Alors, le $\cos \alpha = 1$ et $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot (\cos \alpha)$

ou $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$

La résultante de 2 forces, ayant la même ligne d'action et le même sens a elle aussi la même direction et le même sens que les composantes et est égale à la SOMME algébrique de ces composantes.

-Si $\alpha = 90^\circ$:

Alors le $\cos \alpha = 0$ et $R^2 = F_1^2 + F_2^2$

Dans ce cas particulier, le parallélogramme est un triangle rectangle.

-Si $\alpha = 180^\circ$:

= -1

Alors le $\cos \alpha = -1$ et $R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot (\cos \alpha)$

ou $\overline{R} = \overline{F_1} - \overline{F_2}$

La résultante de deux forces, ayant les mêmes lignes d'actions, mais sens opposés, aura la même direction que les composantes. Le sens de la résultante sera celui de la force ayant la plus grande intensité et sa valeur la DIFFERENCE algébrique des deux composantes.

2.2.2 Décomposition d'une force en 2 composantes. (fig.104)-Méthode graphique.

Imaginons qu'il faille décomposer une force R en 2 composantes, suivant lignes d'action X et Y. Le tout se trouvant dans un même plan. Ces deux lignes d'action forment avec la force R respectivement les angles α et β . Nous traçons en premier lieu la force R à une certaine échelle. Ensuite nous tracerons, passant par l'extrémité de R, une parallèle à chacune des directions X et Y. Du parallélogramme ainsi formé, nous pouvons ressortir les composantes

$$AC = F_1$$

$$AD = F_2$$
-Méthode analytique.

Dans le triangle ABC, l'angle $\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ et au travers de la règle des sinus se rapportant aux triangles quelconques nous pouvons affirmer :

$$\frac{R}{\sin \delta} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha}$$

mais le $\sin \delta = \sin (\alpha + \beta)$

$$\text{donc : } F_1 = \frac{R \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$F_2 = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Si les lignes d'actions ou directions sont perpendiculaires entre elles

$$F_1 = R \cdot \cos \alpha$$

$$F_2 = R \cdot \sin \alpha$$

-Exemples :

1. Une poutre horizontale AB (fig. 105) est fixée dans un mur. BC est une barre. Calculez les forces enregistrées en AB et BC quand une charge 3000 N se trouve pendue à l'extrémité de la poutre.

*Résolution :

La force de 3000 N doit se décomposer en 2 forces F1 et F2 suivant les directions AB et BC. F1 a tendance à tirer sur la poutre, tandis que F2 comprime la barre BC. Si nous composons les triangles BDE et ABC, nous pouvons appliquer la règle des triangles semblables, à savoir :

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{DE}{CB}$$

$$\text{mais } CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5 \text{ m}$$

$$\text{De telle sorte que : } \frac{3000}{1,5} = \frac{F_1}{2} = \frac{F_2}{2,5} \text{ d'où}$$

$$F_1 = 4000 \text{ N et } F_2 = 5000 \text{ N}$$

2. Sur le piston d'un moteur, est exercée une force F . On demande la valeur de la force F_2 qui fait tourner la manivelle (fig.106) sachant que la bielle a une longueur L , formant avec le trait d'axe un angle β et que l'angle formé par la manivelle OB avec l'axe horizontal est α .

*Résolution :

Nous décomposons la force F en une force verticale N et une autre force suivant la direction de la bielle :

$$N = F \cdot \operatorname{tg} \beta$$

C'est cette force N qui agit contre l'alésage du cylindre (cause d'ovalisation)

$$F_1 = \frac{F}{\cos \beta}$$

Nous pouvons déplacer le point d'application de la force F_1 jusqu'en (déplacement sur une même ligne d'action). A cet endroit, nous pouvons décomposer F_1 en 2 composantes F_2 (\perp au rayon) et F_3 (suivant le rayon). C'est donc F_2 qui fait tourner la manivelle et F_3 qui exerce son effort sur les paliers du vilebrequin (non représenté)

$$F_2 = F_1 \cdot \sin (\alpha + \beta) = F \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

$$F_3 = F_1 \cdot \cos (\alpha + \beta) = F \cdot \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

Entre les angles α et β , existe une relation propre au triangle ABO :

$$\frac{L}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta} \quad \text{ou} \quad \sin \beta = \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha$$

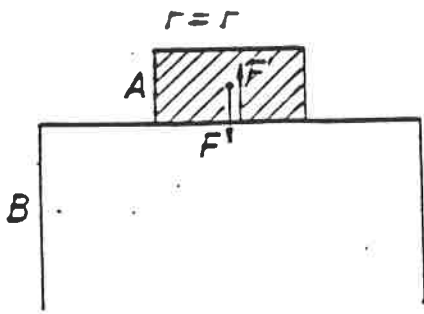


Fig. 96

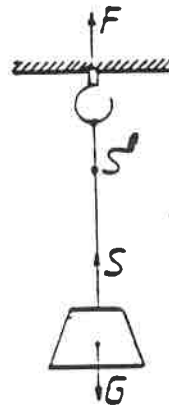


Fig. 97

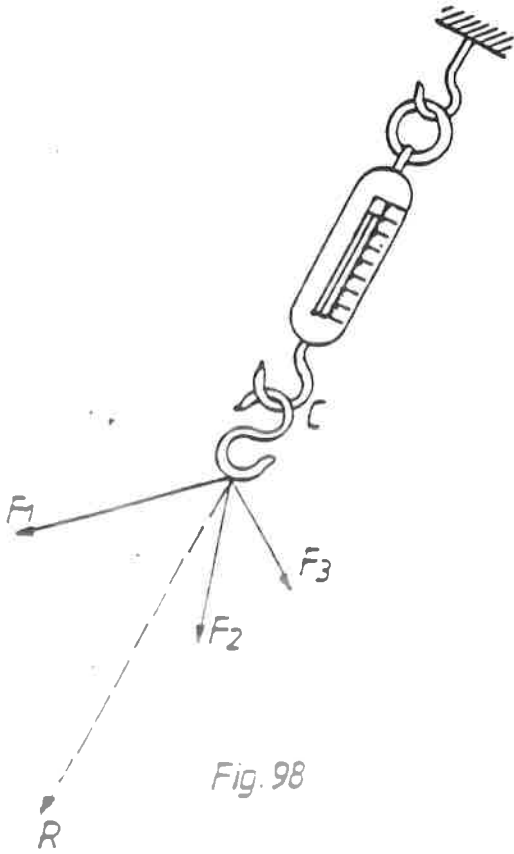


Fig. 98

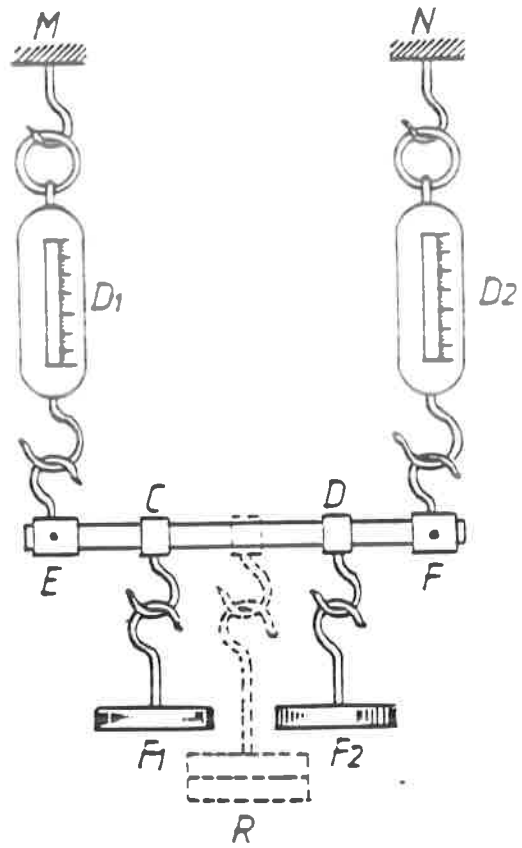


Fig. 99

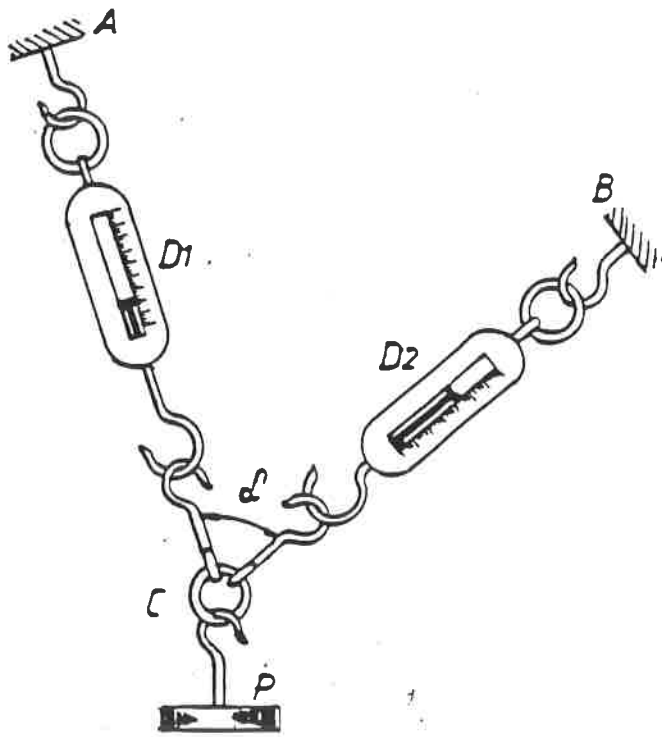


Fig. 100

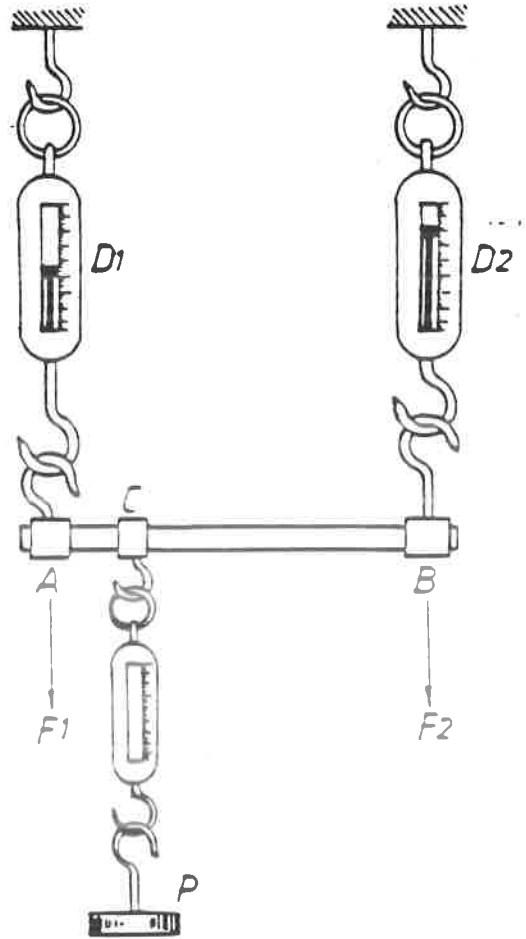


Fig. 101

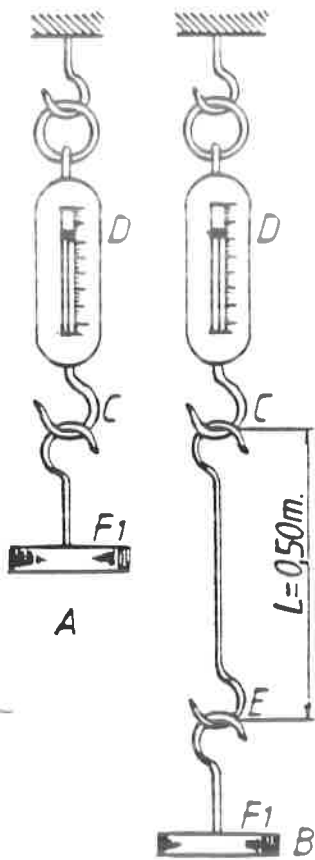


Fig. 102

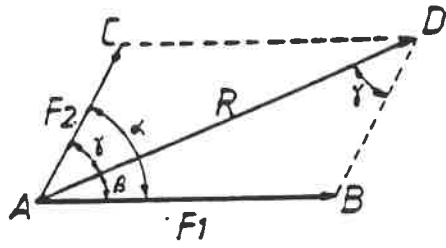


Fig. 103

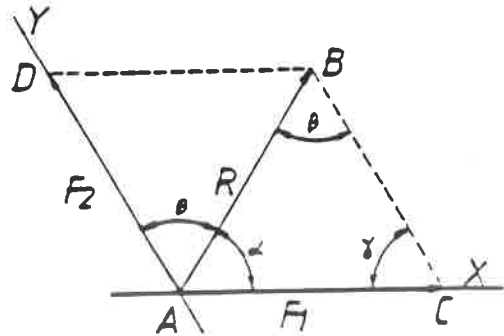


Fig. 104

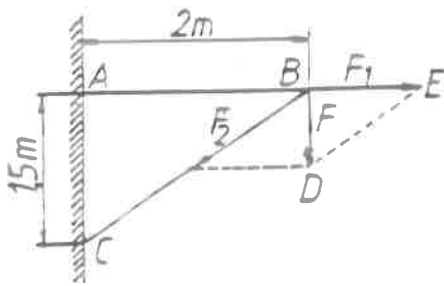


Fig. 105

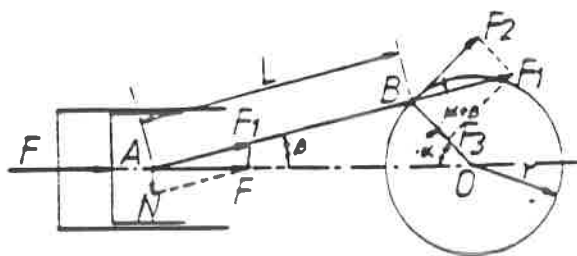


Fig. 106

Cours 1203

2.2.3. Résultante de plusieurs forces concourantes.

Si plusieurs forces F_1, F_2, F_3, F_4 ont un même point d'application, la résultante R du système est égale à la somme des vecteurs.

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4}$$

Ce qui peut encore être écrit de la façon suivante : $\overline{R} = \Sigma \overline{F}$.
Cela signifie que la résultante est égale à la somme d'un certain nombre de termes de nature force.

a) Forces concourantes situées dans un même plan.

* Résolution graphique :

Pour la recherche graphique de la résultante, nous devons passer par la construction du parallélogramme des forces (fig.107). Il faudra en premier lieu rechercher la résultante R_1 des forces F_1 et F_2 , poursuivre par la recherche de la résultante R_2 des forces R_1 et F_3 et enfin définir la résultante R par les forces R_2 et F_4 . Il est clair, que l'on peut également trouver la résultante R du système en dessinant les différentes forces les unes à la suite des autres pour autant que l'on rejoigne le point d'origine de la première force à l'extrémité de la dernière. En effet, $BC = F_2$; $CD = F_3$ et $De = F_4$. Le polygone ABCDE se nomme POLYGONE DES FORCES.

Pour connaître, par graphique, la résultante du système, il aura fallu dessiner le polygone à une certaine échelle. La mesure du vecteur R nous indiquera l'intensité de celle de R .

N.B. : L'ordre dans lequel les forces sont rapportées l'une derrière l'autre est sans importance pour le résultat recherché.

* Résolution analytique :

Regardons les différentes forces concourantes F_1, F_2, F_3, F_4 qui sont situées dans un même plan et calculons la résultante du système de forces. Par le point O , nous allons faire passer un système d'axes orthogonaux OX et OY (fig. 108). Nous allons décomposer toutes les forces sur les axes X et Y . Nous appellerons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les angles formés par l'axe positif des X et les différentes forces (voir figure). De cette façon, les composantes sur l'axe X seront égales à :

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1. \cos \alpha_1 \\ X_3 &= F_3. \cos \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= F_2. \cos \alpha_2 \\ X_4 &= F_4. \cos \alpha_4 \end{aligned}$$

et suivant l'axe Y :

$$\begin{aligned} Y_1 &= F_1. \sin \alpha_1 \\ Y_3 &= F_3. \sin \alpha_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= F_2. \sin \alpha_2 \\ Y_4 &= F_4. \sin \alpha_4 \end{aligned}$$

2.

Il faudra ici noter que les valeurs des composantes sur l'axe X seront négatives lorsque l'angle α fera partie des 2ème et 3ème quadrant et que sur l'axe Y, les composantes seront également négatives pour les angles α du 3ème et 4ème quadrant. La somme algébrique des composantes ramenées sur l'abscisse (axe X) donne la résultante R_x .

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \quad \text{ou} \quad R_x = \sum X = \sum F \cdot \cos \alpha$$

La somme algébrique des composantes ramenées sur l'ordonnée (axe Y) donne la résultante R_y . Pour trouver la résultante R (ce qui est recherché), il faudra recomposer les R_x et R_y :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'angle que forme la résultante avec l'axe des X par les formules suivantes :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} \quad \text{ou} \quad \sin \alpha = \frac{R_y}{R}$$

* Remarques :

1. Lors de la relation précédente, nous avons remarqué que $R \cdot \cos \alpha = R_x$ et que $R \cdot \sin \alpha = R_y$. Nous pouvons donc résumer en disant :

**LA PROJECTION DE LA RESULTANTE D'UN SYSTEME DE FORCES
CONCOURANTES SUR UN AXE QUELCONQUE EST EGALE A LA SOMME
ALGEBRIQUE DES PROJECTIONS COMPOSANT LE SYSTEME DE FORCES.**

2. Pour faciliter notre tâche, nous pouvons lors de la pose des axes X et Y faire coïncider l'un des axes ou les deux avec les lignes d'action du système de forces. De cette façon, la projection de ces forces sera égale à la force elle-même ou égale à 0 ($\cos 90^\circ, \sin 90^\circ, \cos 0^\circ, \sin 0^\circ$)

* Exemple :

Déterminer la valeur et la position de la résultante du système de force représenté à la fig. 110

* Résolution :

Nous devons en premier lieu déterminer la valeur des composantes ramenées sur les axes X et Y :

$$\begin{aligned} X_1 &= 4000 \text{ N} \\ X_2 &= 3000 \cdot \cos 60^\circ = 3000 \cdot 0,5 = 1500 \text{ N} \\ X_3 &= 4000 \cdot \cos 135^\circ = 4000 \cdot -0,707 = -2828 \text{ N} \\ X_4 &= 2000 \cdot \cos 330^\circ = 2000 \cdot 0,866 = 1732 \text{ N} \\ Y_1 &= 0 \text{ N} \\ Y_2 &= 3000 \cdot \sin 60^\circ = 3000 \cdot 0,866 = 2598 \text{ N} \\ Y_3 &= 4000 \cdot \sin 135^\circ = 4000 \cdot 0,707 = 2828 \text{ N} \\ Y_4 &= 2000 \cdot \sin 330^\circ = 2000 \cdot -0,5 = -1000 \text{ N} \end{aligned}$$

La composante de la résultante suivant l'axe des X vaut donc :

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4000 + 1500 - 2828 + 1732 = 4404 \text{ N}$$

La composante de la résultante suivant l'axe des Y vaut elle :

$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0 + 2598 + 2828 - 1000 = 4426 \text{ N}$$

La résultante R vaut donc :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4404^2 + 4426^2} = 6247 \text{ N}$$

L'angle α que forme la résultante avec l'axe X est égale à :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{4404}{6247} = 0,7049 \text{ soit un angle } \alpha = 45^\circ 10'$$

b) Forces concourantes, non situées dans un même plan.

Si nous sommes face à une telle situation, il faudra poser un système d'axe comprenant 3 axes orthogonaux (trièdre). C'est sur ces 3 axes qu'il faudra décomposer les différentes forces (fig. 111). Le plan passant par F1 et l'axe Z coupe le plan X-Y suivant la droite OÀ. Décomposons donc F1 suivant cette direction et sur l'axe Z. Ceci donnera les composantes F1' et Z1. Continuons à décomposer F1 suivant les axes X et Y pour respectivement trouver les composantes X1 et Y1.

En clair, cela signifie que :

$$F1 = X1 + Y1 + Z1$$

N.B : Lorsque, dans le texte, nous rencontrons le signe δ , celui-ci se traduit dans les figures par δ

Si nous appelons les angles formés par F1 avec chacun des 3 axes X, Y et Z respectivement α_1 , β_1 , δ_1 nous pouvons déduire ce qui suit :

$$X1 = F1 \cdot \cos \alpha_1 \quad ; \quad Y1 = F1 \cdot \cos \beta_1 \quad ; \quad Z1 = F1 \cdot \cos \delta_1$$

Il faudrait procéder de la même façon si nous avions dans le trièdre deux ou plusieurs forces en action. De cette sorte nous pourrions écrire :

$$\begin{aligned} X2 &= F2 \cdot \cos \alpha_2 \quad ; \quad Y2 = F2 \cdot \cos \beta_2 \quad ; \quad Z2 = F2 \cdot \cos \delta_2 \\ X3 &= F3 \cdot \cos \alpha_3 \quad ; \quad Y3 = F3 \cdot \cos \beta_3 \quad ; \quad Z3 = F3 \cdot \cos \delta_3 \\ &\text{etc} \dots \end{aligned}$$

Toutes les composantes des forces suivant l'axe X, seront remplacées par la résultante R_x qui est égale à la somme algébrique de ces composantes.

$$R_x = \Sigma X = \Sigma F \cdot \cos \alpha$$

Il en sera de même pour la somme des composantes sur les autres axes Y et Z.

$$\begin{aligned} R_y &= \Sigma Y = \Sigma F \cdot \cos \beta \\ R_z &= \Sigma Z = \Sigma F \cdot \cos \delta \end{aligned}$$

La grandeur de la résultante R peut donc maintenant être déterminée par la formule suivante :

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

Quant à la direction de la résultante R, nous pouvons la trouver par les formules qui suivent :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} \quad ; \quad \cos \delta = \frac{R_z}{R}$$

Entre α , β , δ qui forment avec les axes des angles positifs, il existe la relation qui suit :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$$

De sorte que seulement 2 des angles peuvent être choisis arbitrairement (si l'on veut par exemple poser des données pour la rédaction d'un exercice).

Démonstration de ce qui vient d'être dit :

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = R^2$$

$$\text{ou } R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\delta = R^2$$

$$\text{donc en simplifiant par } R^2 : \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$$

N.B. Puisque les composantes vectorielles R_x , R_y , R_z sont toujours orientées sur des axes bien définis, il n'est plus nécessaire de traiter ces composantes comme des vecteurs mais bien comme des grandeurs algébriques.

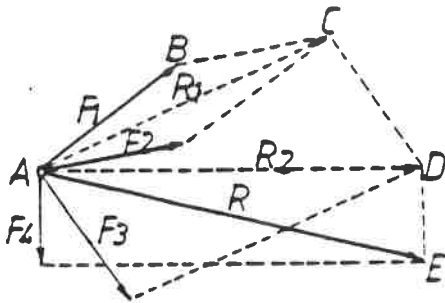


Fig. 107

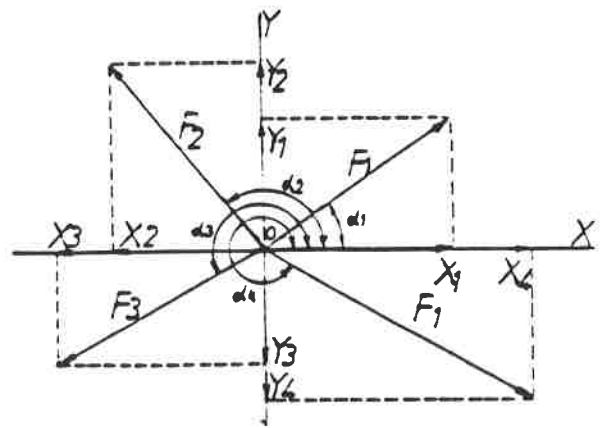


Fig. 108

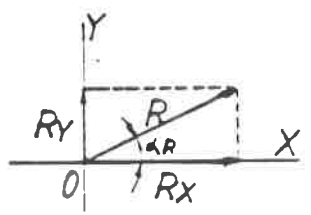


Fig. 109

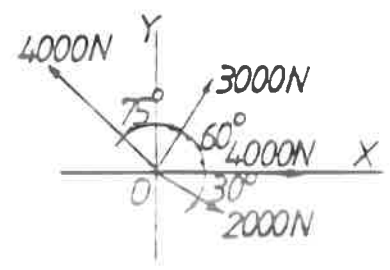


Fig. 110

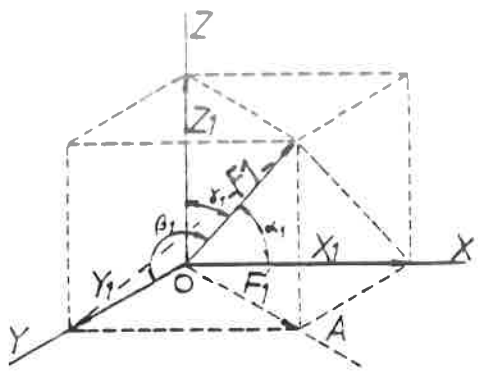


Fig. 111

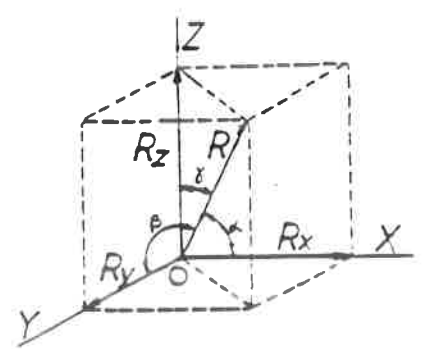


Fig. 112

CHAPITRE III : MOMENT D'UNE FORCE.

3.1 Moment d'une force autour d'un axe.

* Une porte que l'on ouvre, pivote autour de ses charnières. La porte tourne donc autour d'un axe vertical sous l'influence d'une force que nous exerçons à la poignée. Nous exerçons sur cette porte, un moment qui fait pivoter la porte. La vitesse d'ouverture de la porte dépend des facteurs suivants :

- l'intensité de la force,
- le point d'application de la force. En effet, la force nécessaire pour ouvrir la porte sera d'autant plus importante que l'on poussera près des charnières (l'axe de rotation).
- la direction de la force. Si nous exerçons la force de telle sorte que sa direction soit dans le plan de la porte, celle-ci ne tournera pas. Dans ce cas, la direction de la force coupe l'axe de rotation de la porte. Cela veut dire aussi que la distance perpendiculaire entre la force et l'axe de rotation est nulle.

* Définition :

Le moment d'une force par rapport à un axe, est le produit de la valeur de cette force par la distance, mesurée perpendiculairement, qui sépare l'axe et la ligne d'action de la force.

Cette définition est uniquement valable pour les forces se trouvant dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. (fig.113)

* Si la force F avec pour point d'application A (fig.115), ne se trouve pas dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, nous devons décomposer F d'une part sur ce plan pour trouver F' et d'autre part sur un second plan perpendiculaire au premier plan pour trouver F'' . La force F'' étant parallèle à l'axe de rotation, elle n'aura aucun effet sur la rotation du corps autour de l'axe. Seule la force F' fera tourner le corps autour de X .

* De ce qui vient d'être dit, nous pouvons déduire que le moment d'une force autour d'un axe est égale à zéro quand :

- $F' = 0$, c'est-à-dire que F est parallèle à l'axe X ,
- La distance $OB = 0$, c'est-à-dire lorsque la force F traverse l'axe X

en résumé lorsque la force se trouve dans le même plan que l'axe de rotation.

N.B. Une application très répandue de la mesure des moments est la clé dynamométrique.

3.2 Moment d'une force autour d'un point. (fig.114)

Le moment d'une force autour d'un point est le produit de la valeur de cette force par la distance mesurée perpendiculairement entre le point et la ligne d'action de la force. C'est ce moment qui a tendance à faire tourner la force autour du point O. Ce point O s'appelle :

CENTRE DU MOMENT

3.3 Représentation d'un moment d'une force.

* Voici la façon de représenter le moment d'une force :

$$\begin{array}{c} M \quad F \\ O \end{array}$$

Ceci se lit : Moment de la force F autour du point O. Il est égal par définition à $F \cdot a$ (fig.114)

* Par rapport à un axe, le moment s'écrit :

$$\begin{array}{c} M \quad F \\ X \end{array}$$

Suivant la fig. 45 nous pouvons écrire $\begin{array}{c} M \quad F \\ X \end{array} = M \begin{array}{c} F' \\ O \end{array} = F' \cdot OB$

3.4 Unité du moment.

Puisque le moment d'une force est le produit d'une force en N par une distance en mètre, le moment aura pour unité le Newtonmètre (Nm). On utilise également une autre unité qui est multiple de la première, il s'agit du daNm (décanewtonmètre)

$$1 \text{ daNm} = 10 \text{ Nm}$$

3.5 Signe d'un moment.

Lorsque la force a tendance à faire tourner un corps autour d'un point dans le sens horlogique, on parle de moment POSITIF. A l'inverse, si la rotation se fait dans le sens anti-horlogique, on parle de moment NEGATIF.

3.6 Vecteur moment. (fig.116)

Le moment d'une force peut également être représenté par un vecteur. Le vecteur moment a son origine au point O et est perpendiculaire au plan passant par le point O et la force F. Son sens sera dirigé du bas vers le haut si l'on observe un moment positif. L'intensité du vecteur peut elle aussi être représentée à l'échelle.

3.7 Théorème de Varignon. Théorème des moments.

Le moment de la résultante d'un système de forces situées dans un même plan que le point arbitrairement choisi, est égale à la somme algébrique des moments des composantes par rapport à ce même point. Si R est la résultante d'un système de forces F_1, F_2, F_3, \dots situées dans

un même plan, alors :

$$\sum_{O} M R = \sum_{O} M F_1 + \sum_{O} M F_2 + \sum_{O} M F_3 + \dots \text{ ou encore } \sum_{O} M R = \sum_{O} M F$$

a) Démonstration concernant les forces concourantes.

Prenons 3 forces concourantes F_1, F_2, F_3 ayant pour origine le point A (fig. 117) et se trouvant dans un même plan. Si R est la résultante du système, nous devons démontrer ce qui suit :

$$\sum_{O} M R = \sum_{O} M F_1 + \sum_{O} M F_2 - \sum_{O} M F_3$$

ou encore que :

$$R \cdot d = F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - F_3 \cdot c$$

$$F_1 \cdot a = 2 \cdot \text{surface du triangle AOB} = 2 \cdot AOB$$

$$F_2 \cdot b = 2 \cdot \text{surface du triangle AOC} = 2 \cdot AOC$$

$$F_3 \cdot c = 2 \cdot \text{surface du triangle AOD} = 2 \cdot AOD$$

$$R \cdot d = 2 \cdot \text{surface du triangle AOE} = 2 \cdot AOE$$

Nous devons démontrer que :

$$2 \cdot AOE = 2 \cdot AOB + 2 \cdot AOC - 2 \cdot AOD \quad \text{où en simplifiant par 2 :}$$

$$AOE = AOB + AOC - AOD$$

Ces 4 triangles ont le côté OA en commun. Prenons ce côté comme base de chacun des triangles et déterminons la hauteur perpendiculaire à OA pour chacun des triangles (fig 117 droite). Nous pouvons donc maintenant écrire :

$$OA \cdot \frac{h}{2} = OA \cdot \frac{h_1}{2} + OA \cdot \frac{h_2}{2} - OA \cdot \frac{h_3}{2}$$

$$\text{où } h = h_1 + h_2 - h_3$$

b) Démonstration concernant un système de forces en équilibre.

Cas n°1 : Deux forces parallèles de même sens (fig.118)

Traçons, passant par le point O, une perpendiculaire aux lignes d'actions des forces F_1 et F_2 . Nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{O} M F_1 + \sum_{O} M F_2 &= - F_1 \cdot OA + F_2 \cdot OB \\ &= - F_1 (OC + AC) + F_2 (CB - OC) \\ &= - (F_1 + F_2) \cdot OC - F_1 \cdot AC + F_2 \cdot CB \end{aligned}$$

$$\text{Nous avons donc : } - (F_1 + F_2) \cdot OC = -R \cdot OC = \sum_{O} M R$$

$$\text{et encore : } F_1 \cdot AC = F_2 \cdot CB \quad (\text{voir leçon 2})$$

$$\text{et enfin } \sum_{O} M F_1 + \sum_{O} M F_2 = \sum_{O} M R$$

Cas n°2 : Deux forces parallèles mais de sens opposés (fig.119)

De la même façon que ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} M_{O} F1 + M_{O} F2 &= - F1.OA + F2.OB \\ &= - F1.(AC + OC) + F2.(BC + OC) \\ &= (F2 - F1).OC - F1 . AC + F2 . BC \\ &= R . OC = M_{O} R \end{aligned}$$

Car $F1 . AC = F2 . BC$

Cas n°3 : Système de plusieurs forces en équilibre

Les deux démonstrations qui viennent d'être faites sont également applicables au système de plusieurs forces. Exemple pour 4 forces $F1, F2, F3, F4$.

$$\text{Si } R1 \text{ est la résultante de } F1 \text{ et } F2 \text{ alors } M_{O} R1 = M_{O} F1 + M_{O} F2$$

$$\text{Si } R2 \text{ est la résultante de } R1 \text{ et } F3 \text{ alors } M_{O} R2 = M_{O} R1 + M_{O} F3$$

$$\text{Si } R3 \text{ est la résultante de } R2 \text{ et } F4 \text{ alors } M_{O} R = M_{O} R2 + M_{O} F4$$

De ces 3 équations, nous pouvons retirer ce qui suit :

$$M_{O} R = M_{O} F1 + M_{O} F2 + M_{O} F3 + M_{O} F4$$

c) Démonstration concernant un système de forces quelconques se trouvant dans un même plan.

Nous posons un système de 3 forces $F1, F2, F3$ (fig.120) situées dans un même plan. Composons en premier lieu les forces $F1$ et $F2$ pour obtenir la résultante $R1$. Les forces $F1$ et $F2$ seront au préalable déplacées sur leur ligne d'action respective pour se couper en A. Le centre des moments est O.

$$M_{O} R1 = M_{O} F1 + M_{O} F2$$

Ensuite, déplaçons $R1$ et $F3$ sur leur ligne d'action pour qu'elles se rejoignent en B. Nous pouvons maintenant les composer pour obtenir la résultante R recherchée.

$$M_{O} R = M_{O} R1 + M_{O} F3$$

Nous pouvons maintenant comparer ce résultat avec la démonstration sous b) et voir que les équations sont identiques.

N.B. Les différentes démonstrations faites du théorème de VARIGNON pour un système de forces autour d'un point O peuvent également être faites pour un système de forces autour d'un axe X. Nous obtiendrons comme formulation :

LA RESULTANTE D'UN SYSTEME DE FORCES AUTOUR D'UN AXE X EST EGALE A LA SOMME ALGEBRIQUE DES MOMENTS DES COMPOSANTES DU SYSTEME PAR RAPPORT A CET AXE.

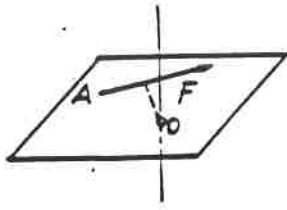


Fig. 113

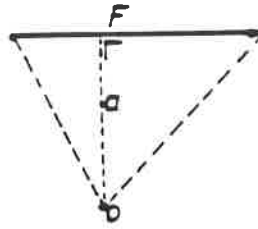


Fig. 114

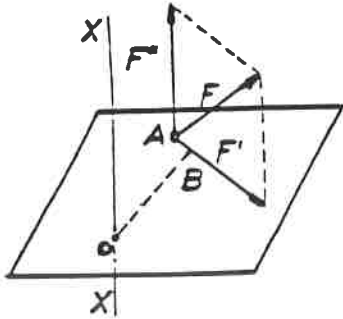


Fig. 115

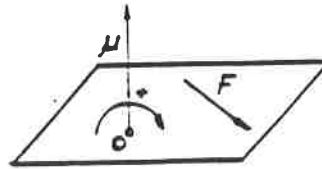


Fig. 116

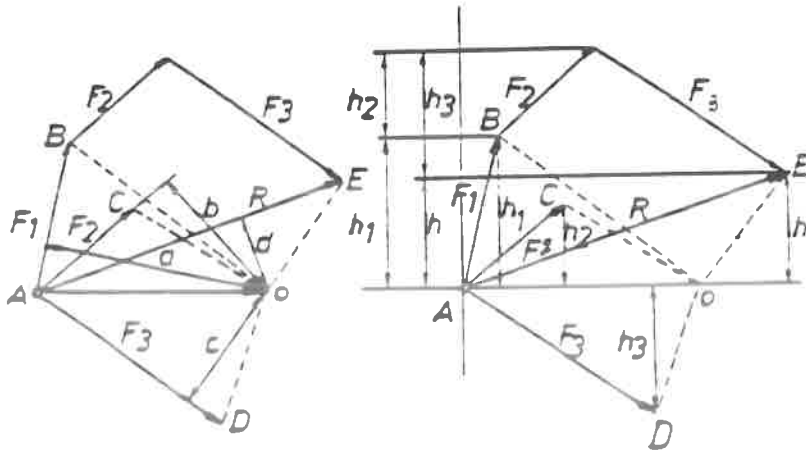


Fig. 117

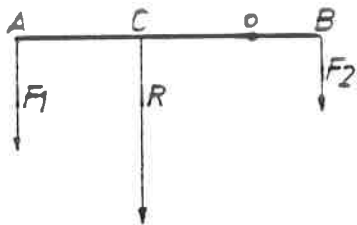


Fig. 118

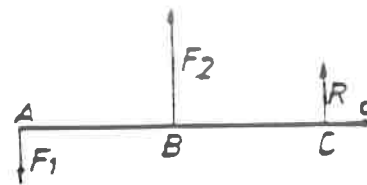


Fig. 119

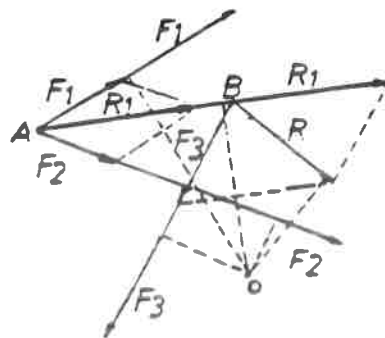


Fig. 120

Cours 1203

8 Calcul de la position de la résultante d'un système de forces situées dans un même plan.

a) Forces parallèles.

Dans le cas de forces parallèles, la valeur de la résultante est égale à la somme algébrique des différentes forces.

Pour la fig.121, nous avons :

$$\bar{R} = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 - \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = \Sigma \bar{F}$$

Par cette formule, le sens et la grandeur de la résultante sont déterminés. Pour trouver la position de cette résultante, nous devons arbitrairement choisir un point O sur la ligne AD.

Nous pouvons maintenant écrire l'équation suivante :

$$F_1 \cdot OA - F_2 \cdot OB + F_3 \cdot OC - F_4 \cdot OD = R \cdot x$$

x étant la distance du point O à la ligne d'action de la résultante. Cette dernière équation nous donne la valeur de x mais également, en fonction du signe trouvé, le côté duquel se trouve la résultante R par rapport à O.

N.B.: Si nous choisissons le point O sur la ligne d'action d'une force, l'équation sera raccourcie d'un terme (cette force n'aura en effet pas de bras de levier d'où un moment égal à zéro.)

b) Forces quelconques.

Pour déterminer la résultante d'un système de forces quelconques nous devons premièrement choisir un système d'axes orthogonaux (fig.122) et décomposer les forces du système sur ces axes.

Par exemple X1, X2, X3, ... seront les composantes des forces sur l'axe X et Y1, Y2, Y3, ... seront les composantes sur l'axe Y. La composante de la résultante sur l'axe X est égale à :

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \Sigma X$$

Pour la deuxième composante de la résultante, nous aurons :

$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \Sigma Y$$

Les forces R_x et R_y peuvent maintenant être composées de façon à retrouver R :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

L'angle que forme la résultante avec l'axe des X peut être déterminé par :

$$\text{tg } \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

La position exacte de la résultante sera connue lorsque nous connaîtrons la distance d qui sépare le point O de la ligne d'action de la résultante R .

$$M_R = \sum M_X + \sum M_Y$$

3.9 Exemple.

Calculez la résultante R du système de forces situées dans un même plan de la fig.123, ainsi que l'angle d'inclinaison de R avec l'axe X. De plus, déterminons la distance qu'il existe entre le point O et la ligne d'action de R .

Résolution :

La valeur de la résultante peut-être trouvée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X_1 &= 500 \text{ N} \\ X_2 &= 0 \text{ N} \\ X_3 &= 400 \cdot \cos 120^\circ = -200 \text{ N} \\ Y_1 &= 0 \text{ N} \\ Y_2 &= 200 \text{ N} \\ Y_3 &= 400 \cdot \sin 60^\circ = 346,4 \text{ N} \\ R_x &= \sum X = 300,0 \text{ N} \\ R_y &= \sum Y = 546,4 \text{ N} \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 623 \text{ N}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{R_y}{R_x} = 1,82 \text{ d'où } \alpha = 61^\circ 20'$$

La distance d quant à elle vaut :

$$M_R = \sum M_X + \sum M_Y$$

$$-623 \cdot d = (500 \cdot 0,4) - (200 \cdot 0,3) - (200 \cdot 0,6) - (346,4 \cdot 0,8)$$

d'où d vaut 0,41 mètre.

CHAPITRE IV : COUPLE DES FORCES.

Définition : (fig.124)

Deux forces parallèles et de mêmes intensités ayant des lignes d'actions différentes ainsi que des sens opposés forment un couple.

Règles fondamentales.

* La résultante d'un couple est nulle. $R = F + (-F') = 0$ car $F = F'$
Un couple ne produit donc aucune translation (pas de résultante) mais provoque une rotation.

* La somme algébrique des moments de deux forces, qui forment un couple par rapport à un point quelconque, a une valeur bien définie. Celle-ci est égale à :

$$\begin{aligned} M_O F + M_O F' &= F.OA + F'.OB \\ &= F.(OA + OB) \text{ car } F = F' \\ &= F . a \end{aligned}$$

a étant la distance mesurée perpendiculairement entre les forces.

Le produit de $F . a$ se nomme moment du couple.

* Le moment d'un couple est POSITIF lorsque le couple fait tourner le corps dans le sens horlogique .

* Inversement, le moment du couple sera NEGATIF lorsque le couple fera tourner le corps dans le sens anti-horlogique

* Le moment d'un corps est indépendant du centre des moments (O ou O')

Considérons un corps (fig.125) pouvant pivoter autour du point O. De par le poids de ce corps, celui-ci aura tendance à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour compenser cet effet, le corps est tenu en équilibre par le couple de forces F et F'. Nous remarquerons que l'équilibre sera également conservé, si dans le même plan, nous appliquons un couple F1 et -F1 ou encore F2 et -F2.

Démonstration. (fig. 126)

Déterminons l'effet du moment d'un couple F et -F par rapport à un point O choisi arbitrairement situé dans le même plan que les forces.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } M_O F &= X1 . F - X2 . F \\ &= F (X1 - X2) \\ &= F . l \end{aligned}$$

Dans cette démonstration, nous avons l qui correspond à la distance qui sépare les deux forces parallèles. Le moment d'un couple de forces ne dépend donc pas de la position du point O. De ceci, nous pouvons dire :

LE MOMENT D'UN COUPLE PAR RAPPORT A N'IMPORTE QUEL POINT

EST UNE CONSTANTE .

Donc, la distance entre les forces ainsi que leurs intensités sont les seuls paramètres pouvant faire varier ou influencer le moment d'un couple de forces situées dans un même plan.

On dit également que deux couples ont la même valeur, lorsque ceux-ci sont situés dans un même plan et qu'ils ont chacun le même couple en grandeur et en sens.

Exercice :

Pour tarauder un trou M 24, on utilise un tourne à gauche avec des bras de leviers ayant une longueur de 0,2 mètre. Nous exerçons dans un même plan un effort de 200 N perpendiculairement à chacune des extrémités.

Quelle est la valeur de l'effort de coupe K sur chacune des 4 arêtes de coupes du taraud ?

Résolutions :

1ère méthode :

* Les deux forces forment un couple d'une valeur égale à :

$$200 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m} = 80 \text{ N.m}$$

* Sur les 4 arêtes tranchantes s'appliquent 4 forces K formant 2 couples dont chacun a pour valeur :

$$K \cdot 0,024 \text{ N.m}$$

* De ces deux premiers points, nous pouvons dire que :

$$80 \text{ N.m} = 2 \cdot (K \cdot 0,024) \text{ N.m}$$

$$\text{d'où } K = \frac{80}{2 \cdot 0,024} = 1666,6 \text{ N}$$

2ème méthode :

Nous pouvons également résoudre la question par la méthode vue au chapitre précédent, à savoir l'équilibre des forces :

$$\sum \bar{M}_O = 0$$

$$-(200 \text{ N} \cdot 0,2\text{m}) + 4 \cdot (k \cdot 0,012) - (200 \text{ N} \cdot 0,2\text{m}) = 0$$

$$\text{d'où } K = 1666,6 \text{ N}$$

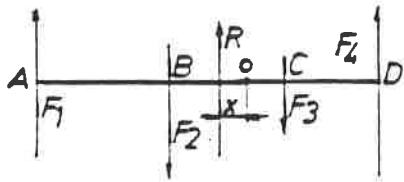


Fig. 121

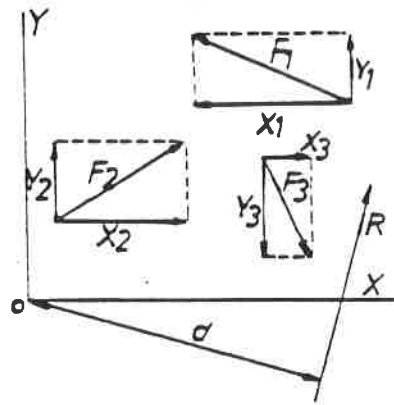


Fig. 122

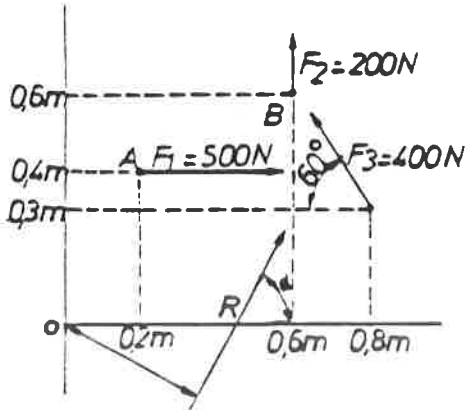


Fig. 123

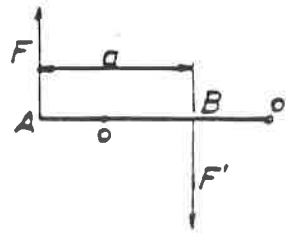


Fig. 124

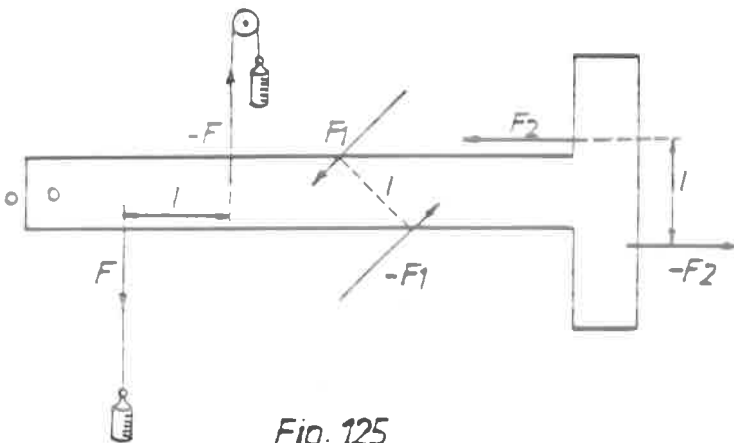


Fig. 125

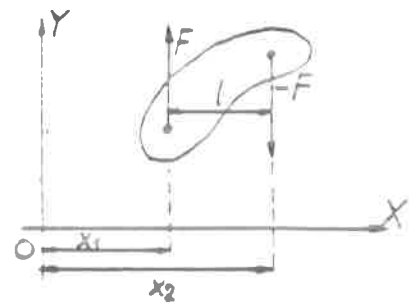


Fig. 126

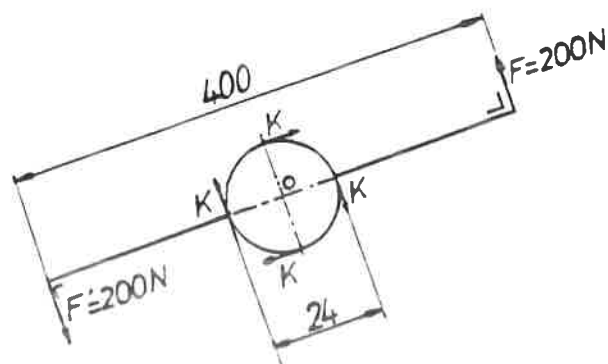


Fig. 127

Cours 1203

CHAPITRE V :: EQUILIBRE DES CORPS.

1 Conditions générales d'équilibre.

* Au chapitre I concernant la statique (point 1.2) nous avons déjà décrit les conditions pour qu'un corps soit en équilibre. Par la suite, nous avons pu déterminer son équilibre par des calculs vectoriels ou analytiques.

* Regardons les figures suivantes pour lesquelles les forces agissent dans leurs plans respectifs :

- La figure 128a présente une forme libre de tout mouvement dans son plan. La force F sera appliquée au centre de gravité de la forme. Nous constatons que seul, le mouvement de translation, entre en action.

- Si nous appliquons la force à un autre endroit (fig. 128 b), nous constatons un mouvement de translation et de rotation.

Nous pouvons donc déduire que sous l'influence d'une force et quel que soit son point d'application, un corps se met toujours en mouvement. Si deux forces agissent sur un corps, celles-ci vont modifier l'état de mouvement ou de repos du corps sauf si l'une des forces supprime les effets de l'autre. Nous rencontrons ce cas lorsque :

- les deux forces ont la même intensité et que,
- celles-ci se trouvent sur la même ligne d'action (fig.129 a)

Si seule la première condition est remplie nous obtiendrons un couple (fig 129 b) et l'équilibre ne sera pas établi. Rappelons que le couple est déterminé par un moment et que le centre des moments peut se situer en un endroit quelconque. Les conditions d'équilibre peuvent donc être résumées ci-dessous :

1° Les forces doivent être de même intensité et de sens contraire :

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \overline{F} = 0$$

2° Ces forces doivent avoir la même ligne d'action. Le moment de ces deux forces par rapport à un point quelconque de leur plan est égal et de sens contraire. Donc, nous avons :

$$M_{\text{O}} \overline{F_1} + M_{\text{O}} \overline{F_2} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \Sigma M_{\text{O}} \overline{F} = 0$$

Si le corps est soumis à un système de plus de deux forces, celui-ci pourra être ramené à deux résultantes partielles R1 et R2 qui exerceront sur le corps des effets tels que nous nous retrouverons dans le cas ci-dessus (2 forces).

Il existe donc deux conditions d'équilibre :

1° LA SOMME DE TOUTES LES FORCES VAUT ZERO : $\Sigma \bar{F} = 0$

$$\text{ou encore } \Sigma_{x} F = 0 \text{ et } \Sigma_{y} F = 0$$

2° LA SOMME DES MOMENTS DE TOUTES LES FORCES VAUT EGALEMENT ZERO.

$$\Sigma_{O} \overline{M F} = 0$$

La première condition implique une non-translation et la deuxième condition implique la non-rotation du corps.

* De ce qui vient d'être dit ci-dessus concernant les forces situées dans un même plan peut également être repris pour les forces quelconques. A savoir :

$$1^{\circ} \Sigma \bar{F} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \Sigma_{X} \bar{F} = 0 ; \Sigma_{Y} \bar{F} = 0 ; \Sigma_{Z} \bar{F} = 0$$

Cela signifie que la somme algébrique, selon les 3 axes X, Y, et Z, de toutes les forces doit être égale à zéro.

$$2^{\circ} \Sigma \bar{M} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \Sigma_{X} M F = 0 ; \Sigma_{Y} M F = 0 ; \Sigma_{Z} M F = 0$$

Cela signifie que la somme algébrique des moments de toutes les forces suivant les 3 axes doit être égale à zéro.

5.2 Corps libre ou non.

* On dit d'un corps qu'il est libre lorsque celui-ci n'est en liaison avec aucun autre corps. Si un système de forces agit sur ce corps, nous pouvons appliquer les conditions d'équilibre vues ci-dessus pour savoir si le corps est en équilibre ou pas.

* Lorsqu'un corps n'est pas entièrement libre, c'est-à-dire lorsqu'il existe un lien entre celui-ci et un autre corps, le premier cité exercera une action sur le second qui lui exercera une réaction sur le premier. La position du corps ne sera pas modifiée si nous remplaçons le corps, qui exerce la réaction, par une force ayant le même effet.

En procédant de la sorte, nous rendons le corps LIBRE. C'est-à-dire que l'on pourra y appliquer les conditions d'équilibre, en n'oubliant pas de tenir compte de(s) la force(s) ajoutée(s) au système.

3 Système de supports et de fixations.

Nous ne parlerons que des systèmes les plus utilisés.

* Corde, câble, barre.

Si un corps est attaché par une corde, un câble ou une barre, la force ne pourra agir que suivant cette corde, ce câble ou cette barre.

* Encastrement (fig.130)

Dans ce cas :

- la réaction peut prendre toutes les directions.
- il faudra tenir compte du moment d'encastrement.
- si les forces sont situées dans 1 plan, nous aurons 3 inconnues.
A savoir :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F = 0 & ; & \Sigma F = 0 & ; & \Sigma M = 0 \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

- si les forces ne sont pas situées dans un même plan, nous aurons 6 équations à poser. A savoir :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F = 0 & ; & \Sigma F = 0 & ; & \Sigma F = 0 \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M = 0 & ; & \Sigma M = 0 & ; & \Sigma M = 0 \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

* Liaison par charnière et point fixe. (fig. 131)

- C'est une bonne liaison mais elle ne supporte pas les mouvements de rotation. Il faut donc que la somme des moments soit nulle.

- Si les forces sont situées dans 1 plan, nous aurons 2 inconnues et nous pourrons poser 2 équations d'équilibre :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F = 0 & ; & \Sigma F = 0 \\ X & & Y \end{array}$$

- Si les forces ne sont pas situées dans un même plan, nous aurons 3 inconnues et 3 équations d'équilibre :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F = 0 & ; & \Sigma F = 0 & ; & \Sigma F = 0 \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

* Charnière mobile ou point mobile. (fig. 132)

- Idem qu'au point précédent à la différence près que ce genre de liaison ne s'oppose pas à un déplacement parallèle à la surface de pose. Cette liaison n'accepte donc que des efforts perpendiculaires à la semelle et/ou des efforts latéraux dont l'équilibre est à vérifier.

- Dans ce cas, il y a toujours 1 inconnue et 1 équation à poser.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma F = 0 \\ Y \end{array}$$

4 Cas statiques et hyperstatiques.

- Si le nombre de points d'appuis est suffisant pour satisfaire l'équilibre d'un système, et que les conditions d'équilibre peuvent être déterminées, nous aurons à faire à un cas de STATIQUE

- Si le nombre de points d'appuis est supérieur à la remarque ci-dessus, les réactions d'appuis ne pourront plus être définies par les conditions d'équilibre que nous connaissons. Celles-ci sortent du cadre de ce cours. Il faut savoir que dans ce cas on parle d'HYPERSTATIQUE.

- Si un corps est composé de plusieurs éléments en équilibre, on peut calculer les réactions d'appuis pour chacun des éléments séparés en tenant compte des forces agissant entre les corps. En effet, les corps ne sont pas libres et des forces (action - réaction) existent entre les corps.

- Exemples :

- * Pour une table comportant 3 pieds, les réactions dans les pieds peuvent être calculées par la statique.
- * Contrairement, si elle possédait 4 pieds, nous ne pourrions résoudre ce problème qui est un cas d'hyperstatique.
- * La poutre représentée à la fig. 133 est un cas de statique. Nous pouvons résoudre ce problème par la théorie vue dans le cours. A la fig. 134, la poutre présentée fait partie d'un cas d'hyperstatique qui tient compte de la déformation élastique de la poutre.

5 Problèmes concernant l'équilibre.

5.1. Système de forces situées dans un même plan.

a) Forces concourantes.

Exemple : Un poids G de 4000 N est suspendu à 2 barres AB et AC (fig.135). Déterminez les efforts dans les barres ?

Résolution :

- De cette figure, il apparaît que nous sommes face à 3 forces concourantes se trouvant dans un même plan. Nous choisissons donc un système d'axes orthogonaux $X-Y$ que nous plaçons avec le point d'origine O au point d'application commun des 3 forces (point A). Si nous posons les 2 forces F_1 et F_2 , nous pouvons imaginer que les 2 barres sont enlevées et que le corps (ici le poids de 4000 N) est libre. Les équations sont donc :

$$\Sigma \bar{F} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \Sigma F_X = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$\Sigma F_X = 0 \quad \therefore \quad -F_1 \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0 \quad \therefore \quad F_1 \cdot \cos 60^\circ + F_2 \cdot \cos 45^\circ - G = 0$$

$$\text{d'où} \quad 0,866 F_1 = 0,707 F_2$$

$$0,5 F_1 + 0,707 F_2 = 4000 \text{ N}$$

$$\text{ou encore : } F_1 = 2940 \text{ N} \\ F_2 = 3640 \text{ N}$$

N.B. : Puisque chaque force coupe l'axe des X et l'axe des Y (bras de levier nul), il n'y aura pas de rotation autour des axes.

$$\Sigma M_X F = 0 \quad \Sigma M_Y F = 0$$

b) Forces parallèles.

Exemple :

- Les deux appuis A et B exercent 2 réactions sur la poutre. Ces 2 réactions forment avec les autres forces un système en équilibre.

- La résultante de la charge uniformément répartie vaut : $600 \text{ N/m} \cdot 6 \text{ m}$ soit 3600 N . Le point d'application de cette résultante se situe au centre de la longueur des 6 mètres ainsi chargés, c'est-à-dire à 1 mètre à gauche de B.

- Choisissons un système d'axes orthogonaux X-Y avec le point A pour origine et l'axe X confondu avec la poutre.

- Les conditions d'équilibre sont les suivantes :

$$\Sigma \bar{F} = 0 \quad * \text{ Puisqu'aucune force n'agit suivant l'axe X ni suivant l'axe Z, seule la condition suivante doit être respectée : } \Sigma F_Y = 0$$

$$* \quad - 2000 \text{ N} + R_a - 3600 \text{ N} + R_b - 4000 \text{ N} = 0$$

$$\text{ou } R_a + R_b = 9600 \text{ N} \quad (1)$$

$$\Sigma M_A F = 0$$

$$-(2000 \cdot 2) + (3600 \cdot 4) - (R_b \cdot 5) + (4000 \cdot 7) = 0$$

$$\text{soit } R_b = 7860 \text{ N}$$

$$\text{Suivant (1) } R_a = 9600 - 7860 \\ = 1920 \text{ N}$$

c) Forces quelconques.

Exemple :

Une barre AB est attachée au point A par une charnière et au point B par un câble qui forme avec la verticale, un angle de 30° . (fig. 137)
Déterminez la force dans le câble pour maintenir la barre de 3000 N en position horizontale ainsi que la réaction en A ?

Résolution :

Nous choisissons dans le plan des forces, un système d'axes orthogonaux avec pour point d'origine A. Pour que la barre soit "libre", il faudra au point A une réaction R_A qui aura pour composantes X_A et Y_A

Les composantes de la force dans le câble sont X_F et Y_F et valent :

$$* X_F = F \cdot \sin 30^\circ$$

$$* Y_F = F \cdot \cos 30^\circ$$

Les conditions d'équilibre sont les suivantes :

$$\sum F_X = 0 : F \cdot \sin 30^\circ - X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 : F \cdot \cos 30^\circ + Y_A - 3000 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 : (3000 \cdot 2) - (F \cdot \cos 30^\circ) \cdot 3 = 0 \quad (3)$$

$$\text{De (3) nous avons : } F = \frac{6000}{0,866 \cdot 3} = 2308 \text{ N}$$

$$\text{De (2) nous avons : } Y_A = 3000 - 2000 = 1000 \text{ N}$$

$$\text{De (1) nous avons : } X_A = 2308 \cdot 0,5 = 1154 \text{ N}$$

$$\text{D'où } R_a = \sqrt{(1154)^2 + (1000)^2} = 1524 \text{ N}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y_a}{X_a} = \frac{1000}{1154} = 0,866 \text{ et } \alpha = 40^\circ 54'$$

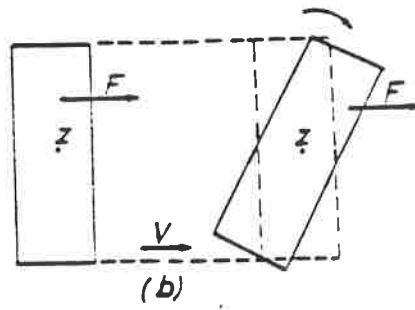
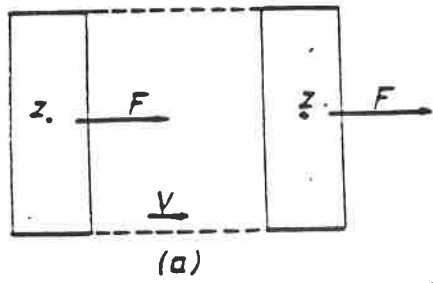
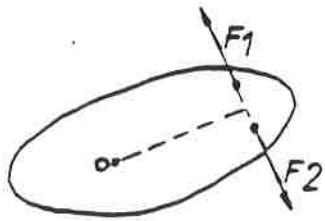
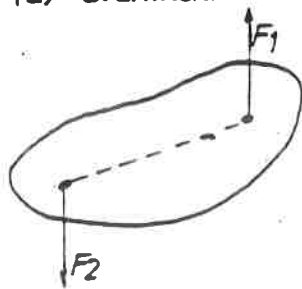


Fig. 128



(a) evenwicht



(b) geen evenwicht

Fig. 129

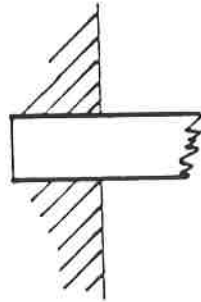


Fig. 130

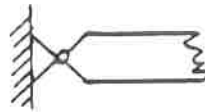


Fig. 131

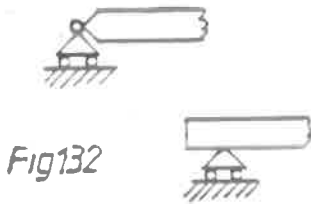
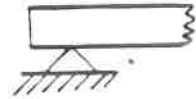


Fig. 132

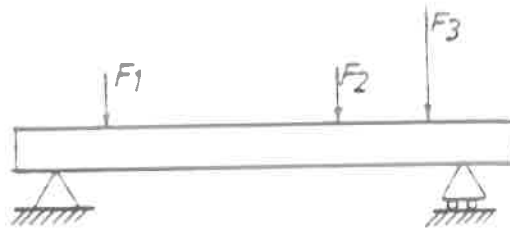


Fig. 133

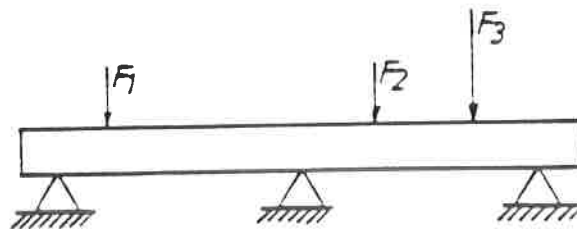


Fig. 134

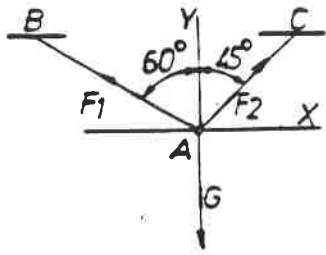


Fig. 135

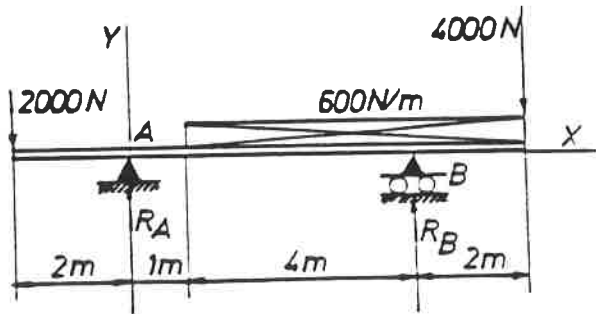


Fig. 136

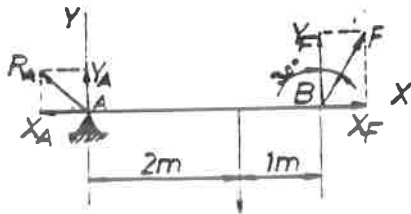
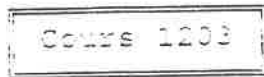


Fig. 137



La présente leçon fera l'objet d'exercices pratiques et oraux dispensés par le professeur.

Cours 1203

CHAPITRE VI : ETUDE DU CENTRE DE GRAVITE.

1.1 Notion du centre de gravité.

1ère notion

Si nous suspendons (fig.141) un levier rectiligne en son milieu, et que nous appliquons à chacune des extrémités A et B des poids égaux F_1 , nous voyons que cette barre conserve sa position d'équilibre quelle que soit la position qu'on lui donne. En effet, la résultante des deux forces égales F_1 passe par le point de suspension O.

Cette résultante est équilibrée par la réaction de l'appui O. Ce point est dénommé : CENTRE DES FORCES PARALLELES F_1 .

Conclusion:

Le centre de deux ou plusieurs forces parallèles est le point d'application de la résultante. Ce centre ne change pas quelle que soit l'orientation du corps, à condition que le parallélisme des forces soit respecté.

2ème notion

1. Suspendons un cercle de tôle mince par un point M (fig.142). On voit que, généralement, le cercle oscille et puis s'immobilise.

2. Lorsqu'il s'est immobilisé, traçons sur le cercle à l'aide d'un fil à plomb la verticale passant par le point M.

3. Re commençons les mêmes opérations à partir des points M' , M'' , M''' . On remarquera que les verticales menées par les points M' , M'' , M''' , passent par un même point G.

4. Suspendons le cercle par le point G. Cette fois le cercle reste immobile quelle que soit la position qu'on lui donne. Cette situation est celle qui se présente lorsque l'on suspend un cercle par son centre.

Conclusion:

Le point G coïncide avec le centre du cercle.

3ème notion

Au lieu d'un cercle en tôle, prenons une tôle de forme quelconque (fig.143). Comme nous l'avons fait avec le cercle, suspendons-la par

divers points M, N, P et Q. Lorsque la tôle s'est immobilisée, traçons chaque fois sur sa surface la verticale passant par le point de suspension.

Remarquons que toutes ces verticales se coupent en un même point G. Suspendons la tôle par ce point G. On constate qu'elle reste immobile quelle que soit la position qu'on lui impose.

Conclusion

1. Le point G ainsi déterminé pour la tôle de forme quelconque jouit, vis-à-vis des forces qui la sollicitent, de la même propriété que le centre du cercle.
2. Dans les expériences ci-dessus, les forces qui interviennent pour provoquer l'oscillation des tôles lorsque l'on change le point de suspension sont dues à la pesanteur. Lorsque les tôles sont devenues immobiles, on peut dire que la résultante de ces forces passe par le point de suspension : on dit à ce moment qu'il y a équilibre.
3. Lorsque l'on suspend les tôles par le point G, l'équilibre subsiste quelle que soit la position des tôles. Conformément à ce qui a été vu plus haut, ce point G doit s'identifier avec le point d'application de la résultante de toutes les forces dues à la pesanteur.

Définition :

Le centre de gravité d'un corps est le point d'application de la résultante des forces dues à l'attraction terrestre qui s'exercent sur tous les éléments qui composent le corps.

Si ce corps est maintenu par le CENTRE DE GRAVITE, il sera en équilibre.

6.2 Recherche graphique du centre de gravité de formes simples.

Suspendons un carré de tôle ABCD par son axe BD (fig. 144). Ce carré est en équilibre, ce qui signifie que le centre de gravité ou le centre des forces parallèles se trouve sur la verticale BD.

Suspendons ensuite le même carré par l'axe AC. Le carré est aussi en équilibre. Son centre de gravité se trouve aussi sur AC.

Etant sur BD et en même temps sur AC, il doit se trouver en un point commun à ces deux droites. Ce point est O. BD et AC sont les axes de symétrie de la surface. Réalisons les mêmes observations avec un rectangle, un losange, un trapèze, un cercle, ... en tôle, nous remarquons que le centre de gravité de ces surfaces est situé sur le ou les axes de symétries.

Rappelons que l'axe de symétrie d'une surface est la droite qui divise cette surface en deux parties égales et superposables (voir géométrie).

Posons un cube par sa face ADGH sur un couteau (fig. 145), nous constatons que les mêmes remarques peuvent être faites.

Conclusions

Le centre de gravité d'un corps qui a un centre, un ou plusieurs axes, un ou plusieurs plans de symétrie, se trouve respectivement en ce

centre, sur les axes ou dans les plans de symétrie.

Remarque :

Nous déduisons d'après ce qui précède : un corps suspendu par son centre de gravité (à la condition que ce centre de gravité soit un point du corps) est en **EQUILIBRE**

3 Recherche du centre de gravité de corps divers.

3.1 Méthode expérimentale.

a) Surfaces :

On généralise la méthode ci-dessus. Cette méthode vient d'être appliquée à des corps ayant des formes simples. Appliquons-la à des corps de formes diverses.

On suspend successivement la surface en des points différents.

Le centre de gravité sera à l'intersection des verticales tracées de ces points.

b) Volumes :

Suspendons le volume successivement en des points différents. Le centre de gravité sera à l'intersection des plans verticaux tracés de ces points.

3.2 Méthode générale.

Soit à rechercher le centre de gravité d'une surface quelconque (fig.146), un profil L par exemple. Décomposons d'abord la surface en figures simples, dont le centre de gravité est facile à trouver. Il s'indique ici de diviser la surface en deux rectangles par exemple : ABCD et EFDH .

Nous appliquons alors en g_1 , centre de gravité du rectangle ABCD, une force F_1 verticale. La valeur de cette force sera choisie proportionnelle à la surface de ce rectangle. Au point g_2 , centre de gravité de EFDH, nous appliquons une force F_2 dont la valeur serait aussi proportionnelle à cette surface.

Le centre de gravité ou centre des forces parallèles est sur la ligne d'action de la résultante R des forces F_1 et F_2 .

Représentons les mêmes rectangles par des forces de même intensité, mais dirigées suivant une autre direction, horizontale par exemple et soient F'_1 et F'_2 les nouvelles forces. Composons ces deux forces. Nous obtiendrons la résultante R' .

Le centre de gravité qui doit se trouver sur R et R' ne peut donc être qu'à l'intersection G de leurs lignes d'action.

Le problème revient donc à rechercher la résultante de deux forces parallèles. Cette recherche peut s'opérer par deux méthodes vues précédemment (graphique ou par le polygone funiculaire).

Cependant la méthode dite des moments est la plus rapide.

Application :

Recherchez par la méthode des moments, le centre de gravité du fer L de 60x40x6 (fig.147).

Surface du rectangle ABCD : $54 \times 6 = 324 \text{ mm}^2$
Surface du rectangle DEFG : $40 \times 6 = 240 \text{ mm}^2$

Le centre de gravité g_1 , du premier rectangle est à la rencontre de ses diagonales et est à 3 mm de l'arête AG du L et à 33 mm de l'arête GF.

Appliquons en ce point g_1 , une force F_1 , dont la valeur sera choisie proportionnellement à sa surface 324 mm^2 . Soit par exemple 324 Newton.

Le centre de gravité g_2 du rectangle DEFG se trouve à la rencontre de ses diagonales et ce centre g_2 se trouve à 20 mm de l'arête AG et à 3 mm de l'arête GF. Nous supposons appliquée en ce point une force F_2 de la valeur proportionnelle à la surface du rectangle : 240 mm^2 . Soit 240 Newton.

Nous sommes donc ramenés à la recherche de la résultante de deux forces parallèles. Nous appliquons la méthode la plus rapide qui ne nécessite pas de tracé graphique, la méthode des moments : "Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un axe est égale à la somme des moments des composantes." (Théorème de Varignon)

1) Moment par rapport à l'arête AG.

$$M_{AG} F_1 = 324 \times 3 = 972 \text{ N.mm} \quad (1)$$

$$M_{AG} R = (324 + 240) \cdot x$$

$$M_{AG} F_2 = 240 \times 20 = 4800 \text{ N.mm} \quad (2)$$

$$= 564 \cdot x \quad (3)$$

2) Moment par rapport à l'arête GF.

$$M_G F'_1 = 324 \cdot 33 = 10692 \text{ N.mm} \quad (4)$$

$$M_{GF} R' = (324 + 240) \cdot y$$
$$= 564 y \quad (6)$$

$$M_{GF} F'_2 = 240 \cdot 3 = 720 \text{ N.mm} \quad (5)$$

(1), (2) et (3) donnent :

$$972 + 4800 = 564 \cdot x$$

$$5772 = 564 \cdot x$$

$$d'où x = 5772 / 564 = \underline{10,23 \text{ mm}}$$

(4) , (5) et (6) donnent :

$$10692 + 720 = 564 \cdot y$$

$$11412 = 564 \cdot y$$

$$y = 11412 / 564$$

$$y = \underline{20,23 \text{ mm}}$$

Conclusion :

Nous connaissons x et y. Il est facile de tracer le centre de gravité de la figure 147.

C 1203
1989/19

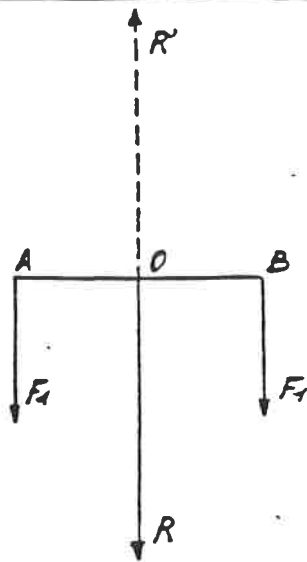


Fig. 141.

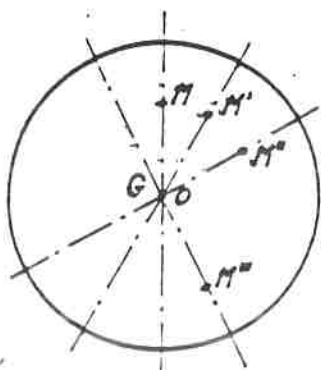


Fig. 142.

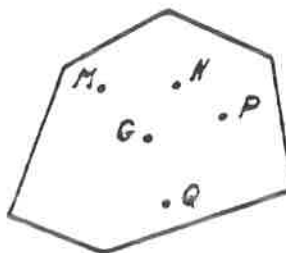


Fig. 143.

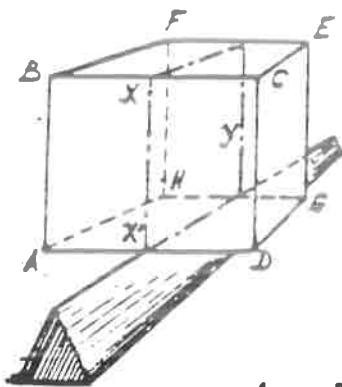


Fig. 145.

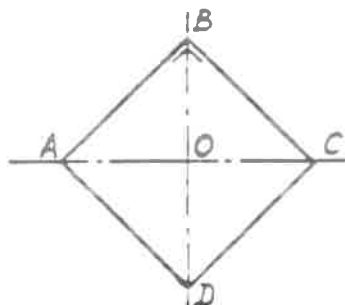


Fig. 144.

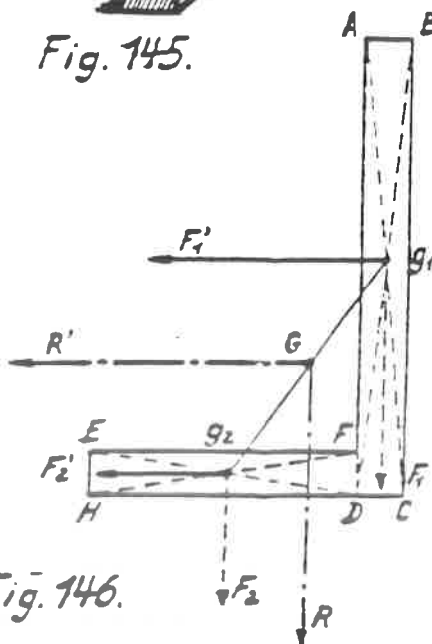


Fig. 146.

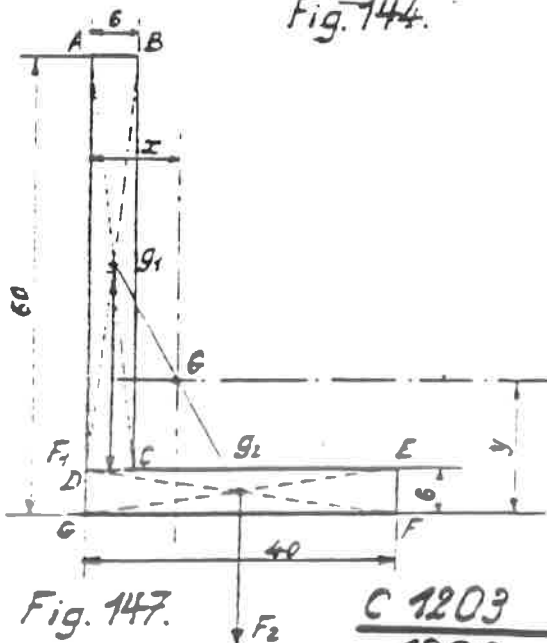


Fig. 147.

C 1203
1989 / 19

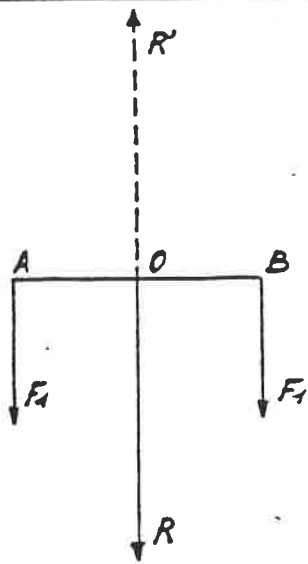


Fig. 141.

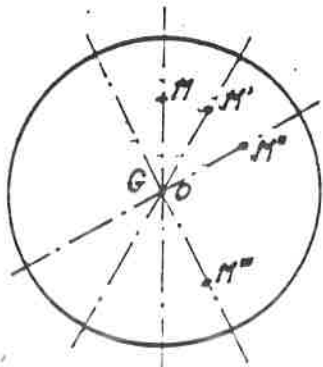


Fig. 142.

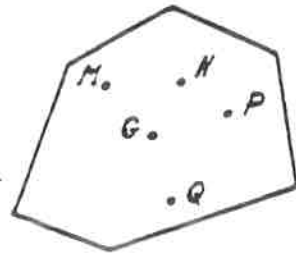


Fig. 143.

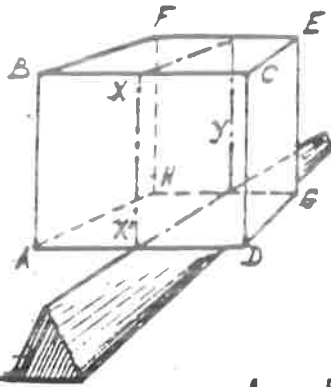


Fig. 145.

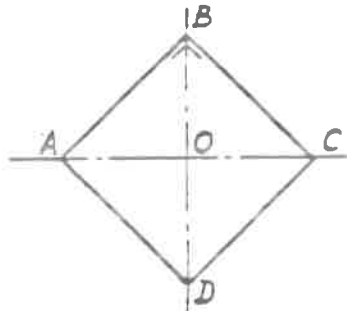


Fig. 144.

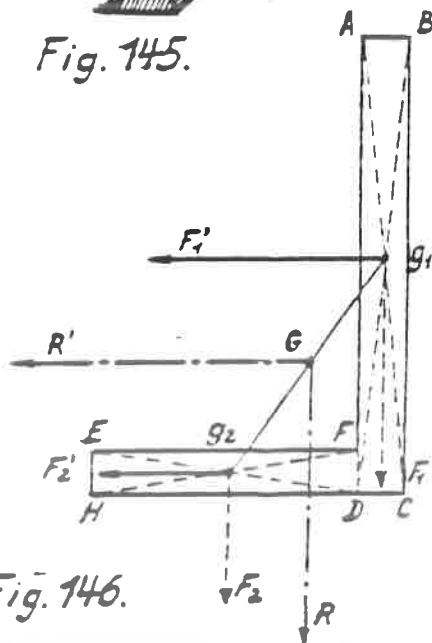


Fig. 146.

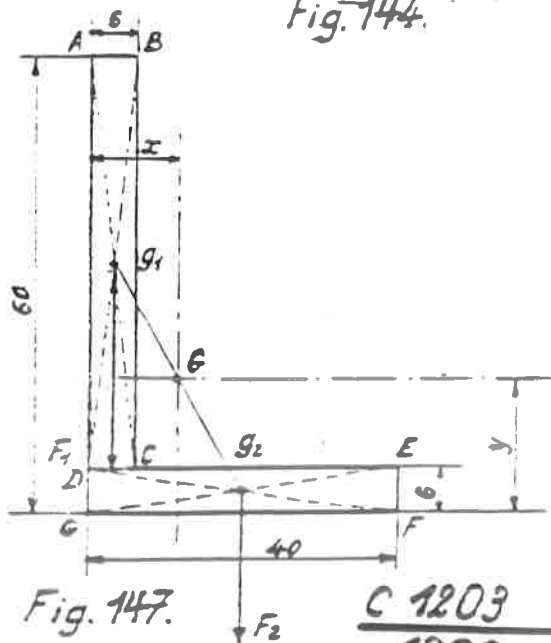


Fig. 147.

C 1203

1989 / 19

Cours 1203

4 Conditions d'équilibre des solides sous l'action de la pesanteur.

4.1 1er cas : Le corps est suspendu.

1. Le centre de gravité G se trouve au-dessous du point de suspension O

Observation :

Supposons une règle suspendue par son extrémité supérieure à un point O (fig.148). Écartons cette règle de la verticale. Lâchons-la. Nous remarquons que le système reprend sa position initiale.

Quand nous lâchons la règle, le centre de gravité de la règle décrit une courbe (fig.118)

Conclusion :

Quand un corps est suspendu par un point situé au-dessus de son centre de gravité et qu'on éloigne le corps de sa position d'équilibre, le centre de gravité décrit une courbe orientée vers le haut. On dit alors que le corps est en état d'équilibre STABLE, ou encore la pesanteur agit dans le sens d'un rétablissement de l'équilibre.

2. Le centre de gravité G se trouve au-dessus du point de suspension O

Observation :

Suspendons une règle par un point O situé au-dessous de G. Abandonnons la à elle-même (fig.149). A ce moment, la règle s'écarte de plus en plus de sa position verticale. Son centre de gravité décrit une courbe orientée vers le bas. La règle ne reprendra plus sa position d'équilibre de départ. Au contraire, elle s'en écartera de plus en plus.

Conclusion :

Quand un corps est suspendu en un point situé au-dessous de son centre de gravité et quand on éloigne ce corps de sa position d'équilibre, le centre de gravité décrit une courbe orientée vers le bas. On dit que le corps est en état d'équilibre INSTABLE; ou encore la pesanteur l'empêche de reprendre sa position d'équilibre initiale.

CONSTATATIONS :

1. L'équilibre est obtenu chaque fois que le centre de gravité et le point de suspension se trouvent sur la même verticale: c'est un fait que nous avons déjà vérifié plus haut.

2.

2. L'équilibre instable de pièces n'est pas courant. En effet, il n'est pas autorisé dans les ateliers, il constitue un danger, puisque cet équilibre est rapidement rompu et il y a chaque fois chute de pièces.

3. Le centre de gravité coïncide avec le point de suspension O.

Observation :

Reprenons la règle et suspendons-la par son centre de gravité. Quelle que soit la position du corps, celui-ci est toujours en équilibre. Le centre de gravité ne se déplace pas; il reste fixe

Conclusion :

Quand un corps est suspendu en un point coïncidant avec son centre de gravité, il est en état d'équilibre indifférent : l'équilibre subsiste quelle que soit sa position.

4.2 2ème cas : Le corps repose sur un plan horizontal.

UN CORPS PEUT REPOSER SUR UN PLAN DE TROIS FACONS :

1°) Par un seul point.

2°) Par deux points : c'est-à-dire par une ligne ou par un axe.

Exemple : le clapet d'une boîte aux lettres.

3°) Par trois points non en ligne droite: c'est-à-dire géométriquement par un plan.

Point 1 : Le corps repose par un point fixe sur un plan horizontal.

Observation :

Faisons reposer un cône C par son sommet S sur un plan horizontal XYZ (fig.150). Nous pouvons considérer le poids du cône comme une force verticale P appliquée au centre de gravité G. Abandonnons le cône à lui-même. Il s'incline et tombe sur le plan. L'équilibre a été rompu. Que s'est-il passé ?

Quand l'axe du cône est vertical, la force P est équilibrée par une réaction (force égale et opposée à P) du plan, appliquée au point de contact S du cône et du plan. Dans cette position, le cône est en équilibre. Lorsque le cône est incliné (fig.151) la force P se décompose en deux autres P1 et P2. La ligne d'action de P1 est l'axe du cône, P1 exerce une poussée sur le plan XYZ. P2 agit perpendiculairement à la première et fait tomber le cône sur le plan.

Principe

Un corps qui repose sur un plan horizontal par un point fixe est en équilibre lorsque le centre de gravité et le point d'appui se trouvent sur la même verticale.

Point 2 : Le corps repose par deux points fixes (droite ou axe) sur un plan horizontal.

Les conditions d'équilibre sont les mêmes.

Principe

Un corps qui repose sur un plan horizontal par un axe fixe est en équilibre lorsque la verticale abaissée du centre de gravité du corps passe par l'axe d'appui.

Point 3 : Le corps repose par trois points fixes (surface) sur un plan horizontal.

Observations :

Nous posons un parallélépipède droit sur un plan horizontal XYZ (fig.152). Nous constatons que la verticale passant par le centre de gravité G passe par l'intérieur de la base ABCD. C'est par cette base que le corps pose sur le plan. On l'appelle base de SUSTENTATION.
Le solide est en équilibre.

Ecartons légèrement le solide de cette position et abandonnons-le; il reprend la position verticale. La verticale tracée du centre de gravité passe encore dans la base ABCD.

Ecartons fortement le solide de la verticale, il perd l'équilibre et tombe sur le plan. Dans ce cas, la verticale du centre de gravité ne passe plus par la base de sustentation.

Posons maintenant sur le plan un parallélépipède oblique (fig.153), la verticale issue du centre de gravité tombe à l'intérieur de la base ABCD en un point assez voisin de l'arête DC. Nous constatons que le solide est en équilibre. Il est encore possible d'écarter le solide de sa position d'équilibre, mais l'inclinaison à partir de laquelle il n'est plus en équilibre, est moins forte que la première fois. On dit que le parallélépipède est moins stable que le premier.

Prenons un parallélépipède oblique construit de telle façon que la verticale issue du centre de gravité traverse le plan en un point extérieur à la base ABCD. La fig. 154 montre que la force P due au poids du corps et appliquée à son centre de gravité fait tomber le corps sur le plan.

Principe

Un solide soumis à l'action de la pesanteur est en équilibre lorsque la verticale abaissée de son centre de gravité tombe à l'intérieur de sa base de sustentation.

Le solide perd l'équilibre dès le moment où la verticale passant par G ne passe plus dans la base de sustentation.

4.3 Conditions de stabilité.

Observations :

Posons une règle sur un plan (une règle est un corps de petite base et de grande longueur) (fig.155) Nous constatons que l'équilibre est difficile à réaliser, il suffit d'incliner la règle d'un petit angle

pour qu'elle tombe. Que s'est-il passé ? La ligne d'action de P tombe rapidement en dehors de la base de sustentation vu la petitesse de celle-ci.

On dit qu'un corps semblable est peu stable lorsqu'il est posé verticalement sur un plan horizontal.

Recommençons l'expérience avec une règle plus petite, mais de même section (fig.156) nous constatons que cette règle est plus stable.

En effet, le centre de gravité de cette règle se trouve plus près du plan horizontal que dans le premier cas. Pour que l'équilibre soit rompu, l'inclinaison de la règle sur la verticale doit être plus grande.

A bases égales, la stabilité est inversement proportionnelle à la hauteur du corps.

Prenons une règle de même hauteur que la première mais de base plus grande (fig.157). Nous constatons que la stabilité est améliorée.

La stabilité d'un solide de hauteur donnée est proportionnelle à la section de la base.

Principe :

Un corps posé sur un plan horizontal est d'autant plus stable que sa base d'appui est plus grande et que son centre de gravité est plus bas.

RESUME :

L'EQUILIBRE D'UN SOLIDE EST STABLE QUAND LA VERTICALE ABAISSEE DU CENTRE DE GRAVITE TOMBE A L'INTERIEUR DE LA BASE DE SUSTENTATION.

Quand on modifie sa position et que la verticale du centre de gravité passe dans la base de sustentation, le corps reprend son équilibre.

Quand cette verticale tombe sur l'arête de rotation et qu'on augmente l'inclinaison, l'équilibre est détruit. Il est dit INSTABLE.

Lorsque la verticale tombe en dehors de la base de sustentation, l'équilibre est impossible, sauf intervention d'une force extérieure.

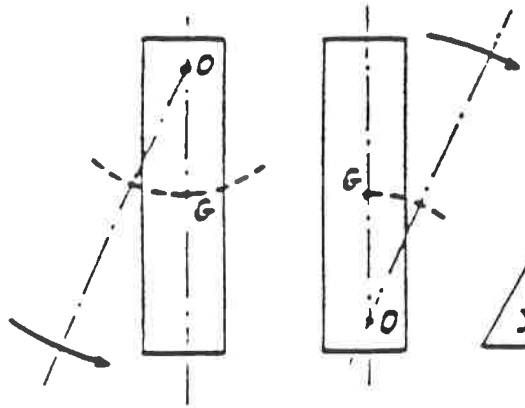


Fig. 148 Fig. 149

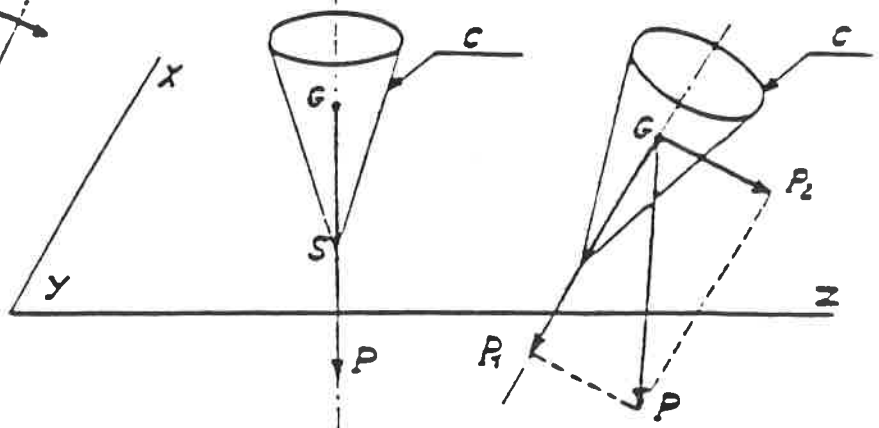


Fig. 150

Fig. 151

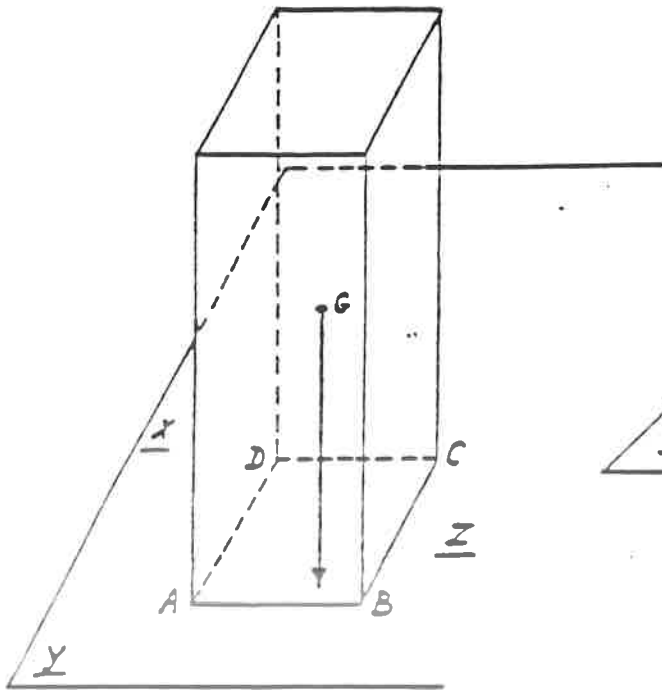


Fig. 152

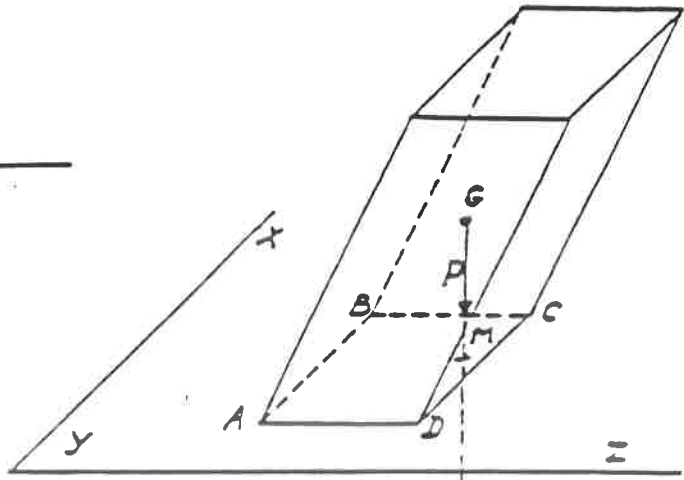


Fig. 153

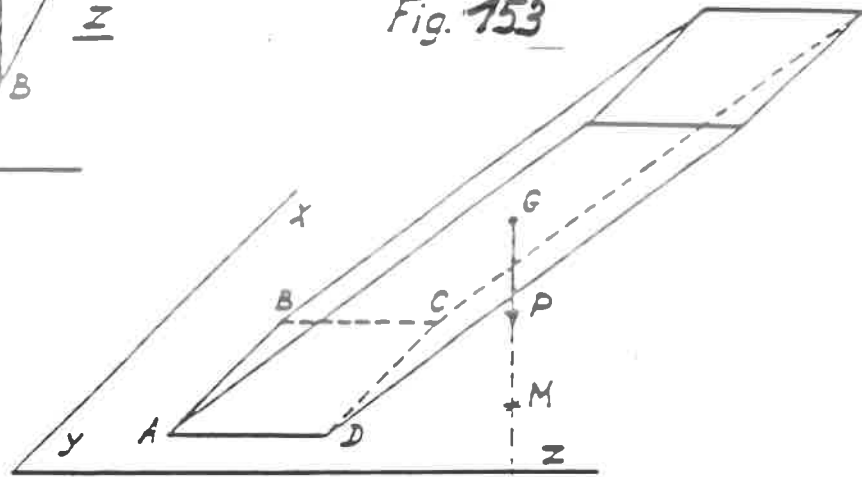


Fig. 154

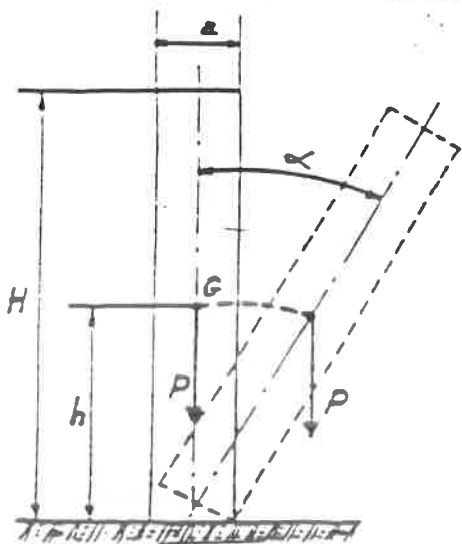


Fig. 155

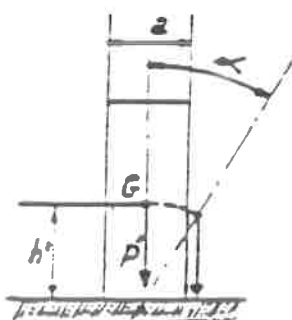


Fig. 156

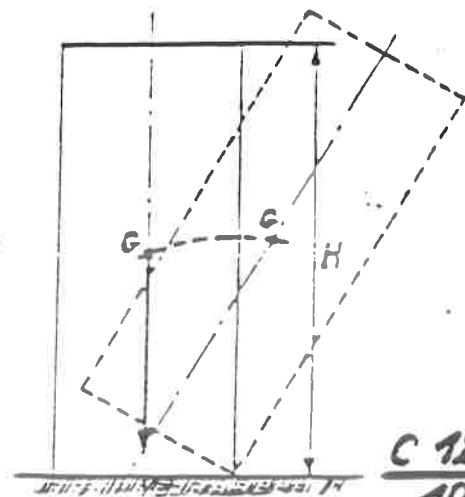


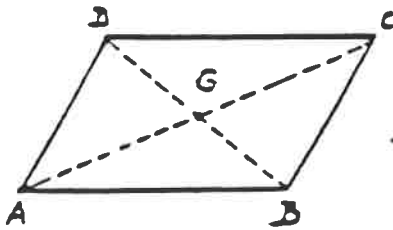
Fig. 157

C 1203

1989 120

POSITION DU CENTRE DE GRAVITÉ DE QUELQUES SURFACES PLANES

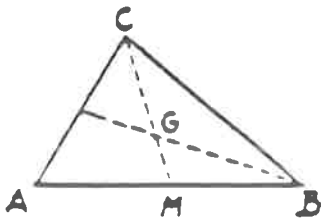
PARALLÉLOGRAMME



Point de rencontre des diagonales

Fig. 158

TRIANGLE

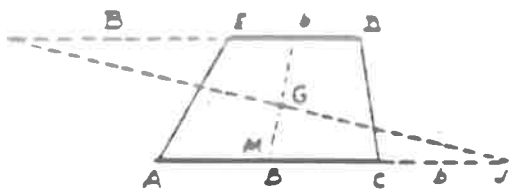


Point de rencontre des médianes

$$GM = \frac{CM}{3}$$

Fig. 159

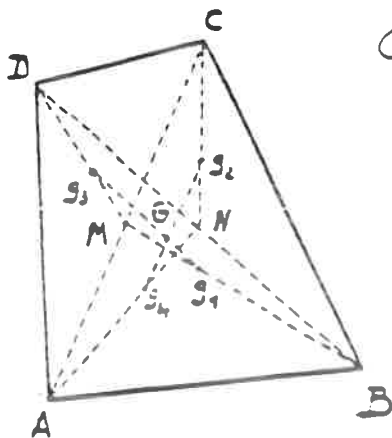
Trapeze



$$\frac{GM}{GN} = \frac{B + 2b}{b + 2B}$$

Fig. 160

Quadrilatère quelconque



G = Point de rencontre de g_1-g_3 et de g_2-g_4 -

- g_1 centre de gravité du triangle A, B, C.
- g_2 " " " " " B, C, D.
- g_3 " " " " " C, A, D.
- g_4 " " " " " D, A, B.

Fig. 161

QUELQUES POSITIONS DES CENTRES DE GRAVITÉ

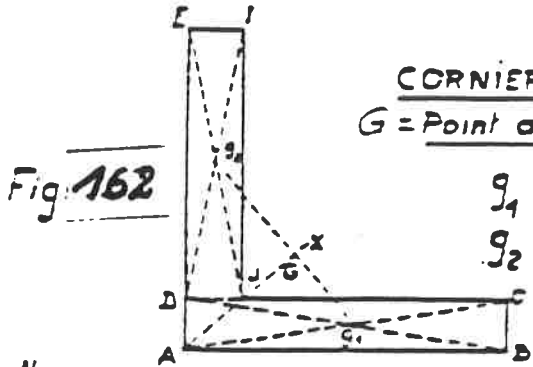


Fig. 162

CORNIERE A BRANCHES ÉGALES *de Lamitai*

$G =$ Point de rencontre de $g_1 g_2$ et de l'axe AX

g_1 centre de gravité du rectangle $ABCD$

g_2 " " " " " " $DEIJ$

AX bissectrice de l'angle EAB

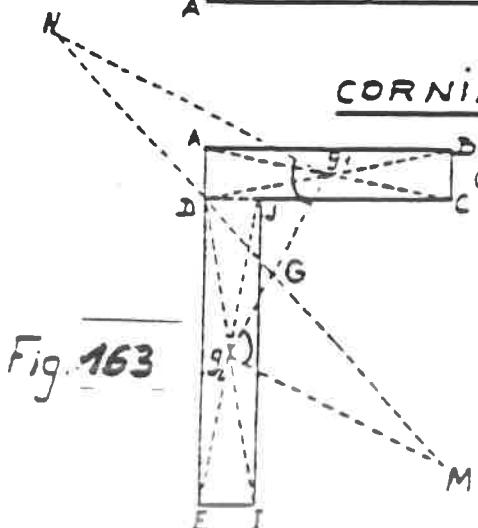


Fig. 163

CORNIERE A BRANCHES INÉGALES

$G =$ Point de rencontre de $g_1 g_2$ et de MN

g_1 centre de gravité du rectangle $ABCD$

g_2 " " " " " " $DEIJ$

$g_2 M$ et $g_1 N$ perpendiculaires à $g_1 g_2$

$g_2 M = AB$ $g_1 N = DE$

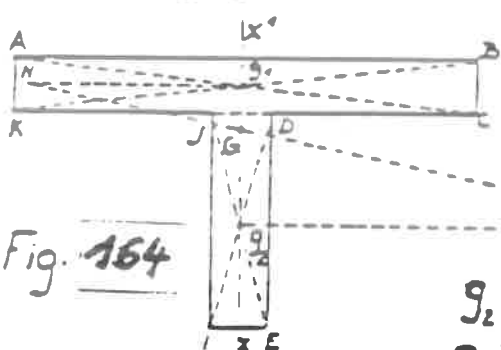


Fig. 164

SIMPLE TĒ

$G =$ Point de rencontre de $g_1 g_2$ et de MN

g_1 centre de gravité du rectangle $ABCD, K$

g_2 centre de gravité du rectangle $DEIJ$

$g_2 M$ et $g_1 N$ perpendiculaires à $g_1 g_2$

$g_2 M = AB$ $g_1 N = DE$

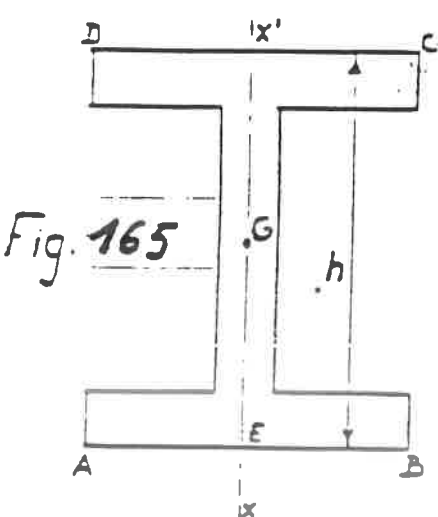


Fig. 165

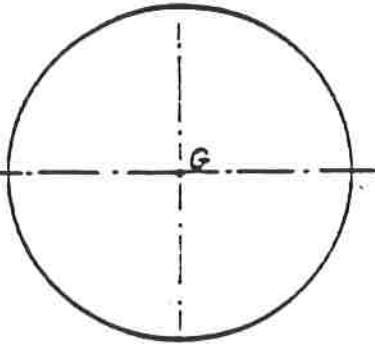
DOUBLE TĒ

$GE = \frac{h}{2}$

POSITION DU CENTRE DE GRAVITE DE QUELQUES SURFACES PLANES.

CERCLE.

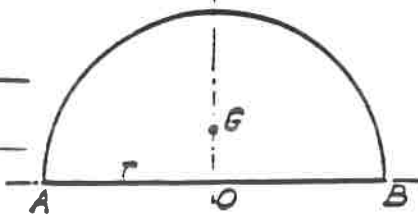
Fig. 166



Centre du cercle.

DEMI-CERCLE

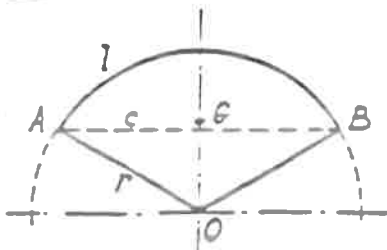
Fig. 167



$$GO = \frac{4r}{3\pi} \quad r = \text{rayon du cercle.}$$

SECTEUR CIRCULAIRE

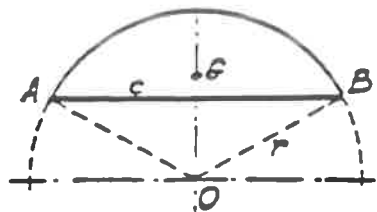
Fig. 168



$$GO = \frac{2rc}{3l} \quad \begin{array}{l} r = \text{rayon du cercle.} \\ l = \text{longueur de l'arc.} \\ c = \text{longueur de la corde.} \end{array}$$

SEGMENT DE CERCLE

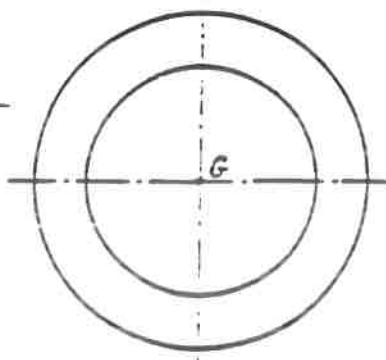
Fig. 169



$$GO = \frac{c}{12S} \quad \begin{array}{l} c = \text{longueur de la corde} \\ S = \text{surface du segment.} \end{array}$$

COURONNE CIRCULAIRE

Fig. 170



Centre commun des cercles.

S.N.C.B
Enseignement Professionnel

Mécanique élémentaire

Cours 1203

II/II

Leçons 21 à 30



Cours 1213

La présente leçon fera l'objet d'exercices pratiques et oraux dispensés par le professeur.

3e partie - La dynamique.

Chapitre 1 - Les forces de frottement.

1.2. Les résistances passives.

Rappel : Le principe de l'inertie vu en statique nous indiquait que: pour modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps, il faut une cause. Cette cause, c'est UNE force.

1. Observations :

- a) Un volant tournant à toute vitesse s'arrête après un certain temps ;
- b) Une bille lancée doucement sur la table du billard s'arrête ;
- c) Le wagon lancé sur la voie s'arrête.

Ces corps : le volant, la bille, le wagon devraient, en théorie, continuer leur mouvement sans jamais s'immobiliser. Or, en pratique, ils s'arrêtent. Pour provoquer leur arrêt, il faut une cause; cette cause, c'est donc une force.

L'étude du mouvement du volant prouve qu'il existe une force de frottement de l'arbre du volant dans ses coussinets.

La bille roulant sur la piste s'arrête, une force de frottement existe entre la bille et la piste.

La cause de l'arrêt du wagon réside en la force de frottement des fusées sur les coussinets et des roues sur les rails.

On nomme fréquemment ces frottements : résistances passives parce que ces résistances sont en général nuisibles, passives.

Notion : Le frottement est une force qui s'oppose au mouvement. Cette force prend naissance au contact des deux corps en mouvement.

1.2. Le frottement de glissement.

1.2.1. Généralités.

Les blocs de frein frottent sur les bandages du wagon. Ils glissent sur les bandages tout en frottant sur ceux-ci. Ils frottent en glissant.

La ménagère qui polit la taque de la cuisinière, frotte cette taque avec le chiffon. Le chiffon frotte en glissant sur la taque.

Le patineur évolue sur la glace. Ses patins frottent la glace en glissant.

Ces exemples sont des cas de frottement de glissement. Il en est de même d'un coussinet qui frotte en glissant sur son arbre. Remarquons que le coussinet est fixe et l'arbre tourne.

1.2.2. Loi 1. Glissement au démarrage.

Observation : La figure 141 montre un appareil qui va nous permettre de trouver les lois du frottement.

Un chariot C peut glisser sur un chemin plan AB horizontal. Le chariot frotte sur le chemin. Il glisse. Il s'agit donc bien d'un frottement de glissement.

Le poids du chariot peut être augmenté par l'adjonction de charges N que l'on suspend au crochet R fixé au chariot. Le chariot pèse 20N. Un câble tire horizontalement le chariot vers la gauche. Ce câble est ramené à la verticale par une poulie O. On peut appliquer une force (un poids) qui va tendre à déplacer le chariot vers la gauche. Un dynamomètre D est intercalé sur le câble et mesure la force F nécessaire au déplacement du chariot.

La force qui provoque la mise en mouvement du chariot s'appelle force ou effort de démarrage. Cette force sert à vaincre le frottement entre le chariot et le chemin.

L'expérience consiste en la mesure de la force F pour différentes charges du chariot. La figure 142 indique la sollicitation du chariot, c'est-à-dire les forces qui agissent sur le chariot.

Charges N en Newton	Forces F de démarrage en N	Rapport $\frac{F}{N}$
Poids du chariot 20N	-	-
$20 + 10 = 30$	5 environ	$\frac{5}{30} = 0,16$ environ

Charges N en Newton	Forces F de démarrage en N .	Rapport $\frac{F}{N}$
$20 + 40 = 60$	10 environ	$\frac{10}{60} = 0,16$ environ
$20 + 100 = 120$	20 " "	$\frac{20}{120} = 0,16$ " "

Conclusions :

1. L'effort de démarrage F qui sert à vaincre la résistance au frottement du chariot, varie avec la charge N .
2. La surface d'appui S de la charge N reste constante dans les trois expériences.
3. La charge N (en ^{Newton}) divisée par la surface S (en cm^2) égale une pression (N / cm^2).

$$\text{Pression} = \frac{\text{Force}}{\text{Surface}}$$

$$\text{Unité de pression} = \frac{\text{Unité de force}}{\text{Unité de surface}} = \frac{N}{cm^2} = N / cm^2$$

$$\frac{N}{S} = p$$

Cette pression est perpendiculaire au plan. On dit qu'elle est normale au plan.

Loi 1. - La force de frottement de glissement s'oppose au mouvement d'un corps sur un plan. Cette force est proportionnelle à la force normale exercée par le corps sur ce plan.

1.2.3. - Coefficient de frottement.

Le rapport $\frac{F}{N}$ de l'effort de démarrage à la force normale (voir tableau ci-dessus) est appelé coefficient de frottement.

On désigne $\frac{F}{N}$ par la lettre f .

Le tableau indique que f est le même dans les quatre expériences. On dit que f est constant.

$$f = \frac{F}{N}$$

En transformant la formule : $F = f \times N$.

Notion : La force de frottement qui résulte d'une poussée normale donnée se mesure par le produit de cette poussée par le coefficient de frottement.

1.2.4. Angle de frottement.

Observation - Reprenons le matériel du § 1.2.2; suspendons successivement des charges de 1, 3 et 9 kg au chariot.

Pour chacune des charges, nous inclinons le plan AB et nous mesurons l'angle par lequel le chariot C démarre. Cet angle est formé par le plan AB et l'horizontale.

Recueillons les indications dans le tableau ci-dessous :

Charge N en Newton	Angles relevés
Poids du chariot 10N	-
20 + 10 = 30	10° environ
20 + 10 + 30 = 60	10° environ
20 + 10 + 90 = 120	10° environ

Notion : Le chariot se met à glisser le long du plan quelle que soit la charge et quand l'angle formé par l'horizontale et la direction du plan atteint 10° environ. Cet angle s'appelle "Angle de frottement au départ".

Nous venons d'effectuer deux genres d'expériences :

1. les premières avec un plan de glissement horizontal. Un coefficient de frottement au départ de 0,16 en a été déduit.
2. les secondes avec un plan de glissement incliné. Un angle de frottement de 10° environ a été trouvé.

Dans les deux groupes d'expériences, les surfaces en contact n'ont pas changé.

Les observations ont été faites avec le même plan, le même chariot et l'état des surfaces n'a pas varié.

La figure 143 représente le plan incliné AB et le chariot C. La force P représente le poids du chariot, plus la charge qui lui a été appliquée. Ce poids se décompose en deux composantes P et N de direction perpendiculaire. P provoque le glissement de C sur le plan. P est parallèle au plan. N est l'autre composante. N est normale ou perpendiculaire au plan.

Les angles BAC et EOD sont égaux parce qu'ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires. En effet, OD est perpendiculaire à AB et OE est perpendiculaire à AC.

Le triangle ODE est rectangle en D.

Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.

$$ED = OD \times \operatorname{tg} a$$

$$ED = P \text{ et } OD = N$$

$$\text{d'où } P = N \times \operatorname{tg} a$$

$$\text{et } \frac{P}{N} = \operatorname{tg} a \quad (1)$$

Or, nous avons vu plus haut que $\frac{P}{N} = f =$ coefficient de frottement (2).

D'où, angle de frottement $a =$ coefficient de frottement "f".

Notion : Pour les mêmes surfaces de contact, le coefficient de frottement au départ est égal à la tangente trigonométrique de l'angle de frottement.

1.2.5 - Loi 2. - Glissement pendant le mouvement.

Observations : Nous reprenons les mêmes expériences relatives au coefficient de frottement au démarrage; nous mesurons l'effort nécessaire au maintien du chariot à l'état de mouvement uniforme.

Conclusions:

1. C'est toujours le même chariot qui est utilisé dans les nouvelles expériences. Il est soumis aux mêmes charges que dans les expériences précédentes.
2. La force nécessaire pour maintenir le chariot à l'état de mouvement uniforme est plus petite que l'effort de démarrage.
3. La différence entre les deux efforts est importante.

Loi 2 : L'effort de frottement en mouvement est plus petit que l'effort de frottement au départ.

Le coefficient de frottement en mouvement vaut le rapport $\frac{F}{N}$. F est le quotient de l'effort à exercer pour maintenir l'état de mouvement uniforme, par la composante normale au plan. Cette force est appelée généralement poussée normale.

$$\text{Coëff. frott. } f \text{ (mouvement)} = \frac{F \text{ (mouvement)}}{N} \quad (1)$$

Nous avons : (voir § 1.2.2)

$$f \text{ (départ)} = \frac{F \text{ (départ)}}{N} \quad (2)$$

La composante N garde la même valeur dans les relations (1) et (2). Quant à F , nous venons de voir que cet effort est plus petit dans (1) que dans (2). Dès lors, le numérateur de (1) est plus petit que celui de (2). Nous en déduisons que le quotient (1) c'est-à-dire le coefficient de frottement en mouvement est plus petit que le coefficient de frottement au départ.

1.2.6. - Loi 3 - Nature des surfaces en contact.

Nous recommençons l'expérience du § 1.2.2 en surchargeant le chariot de 100N. Cela porte la charge à 120N (Le chariot pesait 20N).

La première observation se fera en laissant les surfaces en contact bien sèches. Rappelons que ces surfaces étaient en acier.

La deuxième, en lubrifiant les surfaces de contact.

La troisième, en remplaçant le chariot en acier par un chariot en bois. Nous maintenons la charge de 120 N. Les surfaces de contact sont maintenues sèches.

La quatrième observation est faite avec le matériel de la précédente. Les surfaces de contact sont lubrifiées.

Le tableau ci-après renseigne les résultats de ces quatre observations :

Surfaces de contact	Charge N en N	Force F de démarrage en N	Rapport $\frac{F}{N}$ ou coefficient de frottement f
1. Acier sur acier (surfaces sèches)	120	20 environ	0,16
2. Acier sur acier (surfaces lubrifiées)	120	10 "	0,12
3. Bois sur acier (surfaces sèches)	120	55 "	0,45
4. Bois sur acier (surfaces lubrifiées)	120	42 "	0,35

Déduction : 1. Comparons les expériences 1 et 3.

Le coefficient de frottement est plus grand dans le glissement bois sur acier que dans le cas acier sur acier.

Le coefficient f varie donc avec la nature des surfaces en contact.

2. Comparons les expériences 1, 2 et 3,4.

Les surfaces en contact restent les mêmes. Le coefficient de frottement f des surfaces lubrifiées est plus faible que celui des surfaces sèches.

Il ya intérêt à lubrifier les surfaces glissantes.

On dit que le frottement est direct ou sec, quand les corps glissent sans interposition de lubrifiant entre leurs surfaces de contact.

Il est dit indirect quand les corps sont lubrifiés.

1.2.7. - Lubrifiants - Leur rôle.

Comment explique-t-on que le lubrifiant diminue le frottement ? Autrement dit, comment le lubrifiant peut-il abaisser la valeur du coefficient de frottement ?

Deux surfaces qui frottent à sec l'une sur l'autre s'échauffent. Vous pouvez très bien en faire l'expérience en frottant deux pièces l'une sur l'autre.

Vous savez aussi que les patins de frein de votre bicyclette s'échauffent lors du freinage par leur frottement sur les jantes des roues.

Industriellement, il arrive qu'un frottement très important provoque un échauffement exagéré. Cet échauffement diminue la résistance du métal et les surfaces de contact s'altèrent; on dit alors qu'il y a grippage.

Cet inconvénient est évité en lubrifiant les surfaces de contact.

De cette façon, le frottement direct métal sur métal ne se produit plus. On admet que le lubrifiant forme un film qui sépare les deux parties métalliques. Les pièces ne glissent plus l'une sur l'autre, mais bien sur une couche de lubrifiant.

Les lubrifiants sont des liquides de fluidité variable.

Nous savons qu'un liquide est formé de petites particules dont la cohésion n'est pas forte. A l'encontre des solides, les liquides peuvent donc se déformer très facilement c'est-à-dire sous l'action de forces très faibles.

La fig. 144 montre ce qui se passe lorsqu'un liquide est interposé entre un corps C mobile frottant sur un corps A fixe.

Nous pouvons comparer ce phénomène au bloc de pierre que les carriers déplacent aisément sur rouleaux alors que le glissement direct du bloc sur le terrain serait quasi impossible.

Les particules de lubrifiant sont un peu semblables à ces rouleaux.

Choix des lubrifiants.

Quand on a affaire à de faibles charges, on emploie des huiles très fluides. Les particules qui forment le lubrifiant roulent librement les unes sur les autres.

Quand les charges deviennent plus importantes, les particules d'huile sont chassées des surfaces en contact. Il faut choisir, dans ce cas, un liquide plus consistant, plus visqueux. La cohésion entre ses particules sera meilleure. Celles-ci ne seront plus chassées et le lubrifiant remplira son rôle.

1.2.8. Loi 4 - Etendue des surfaces en contact.

Observations :

La première expérience de cette leçon a été réalisée avec un chariot C et un chemin AB horizontal (fig. 145).

Ce chemin AB était constitué par la semelle d'un fer U.

Nous reprenons maintenant les mêmes observations en adoptant comme chemin les ailes du fer U (fig.146).

Le tableau ci-dessous donne les résultats comparés des expériences.

Charges en N	Efforts de démarrage en N	
	Expérience 1 (□)	Expérience 3 (□)
30	5	5
60	10	10
120	20	20

Déductions :

1. L'étendue des surfaces en contact est beaucoup plus grande dans le premier cas que dans le second.
2. L'effort de démarrage (effort de frottement) est identique dans les deux expériences.

Loi 4 : La force de frottement est indépendante de l'étendue des surfaces en contact.

1.2.5 - Loi 5 - Influence de la vitesse.

Des expériences difficiles à réaliser dans une salle de cours ont prouvé que le frottement est indépendant de la vitesse.

Cette conclusion est exacte pour les vitesses inférieures à 3,50 m:seconde (12,6 km:heure).

Pour les grandes vitesses, on constate que le coefficient de frottement diminue quand la vitesse augmente.

Loi 5 : Pour de faibles vitesses, le frottement de glissement est indépendant de la vitesse. Pour des vitesses supérieures à 12 km:h., le frottement de glissement diminue avec la vitesse.

Application :

On déplace un bloc de fonte d'un poids de 2000 N sur une glissière horizontale en acier. On demande la force de résistance au glissement de ce bloc sur sa glissière. Le coefficient de frottement de glissement f du bloc sur la glissière vaut 0,18.

Solution :

Formule : $F = N \times f$.

Application numérique : $F = 2000 \times 0,18 = 360 \text{ N}$.

Applications du frottement de glissement.

Les pointes pour l'assemblage du bois ;
Les outils dans leurs manches ;
Les assemblages par boulons, rivets ;
Les embrayages par friction ;
Les freins en général tant à sabot qu'à bandes.

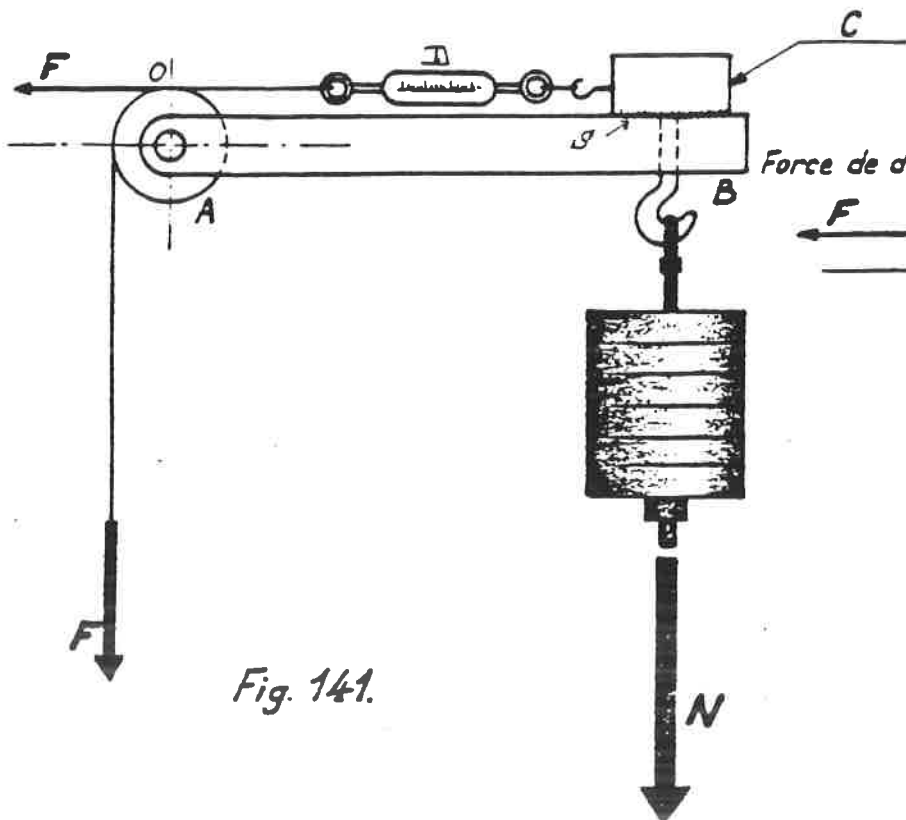


Fig. 141.

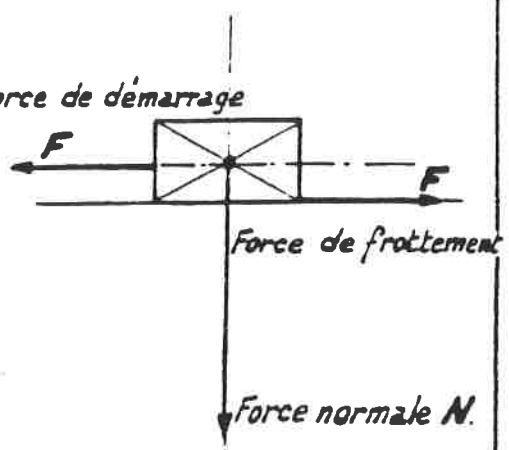


Fig. 142.

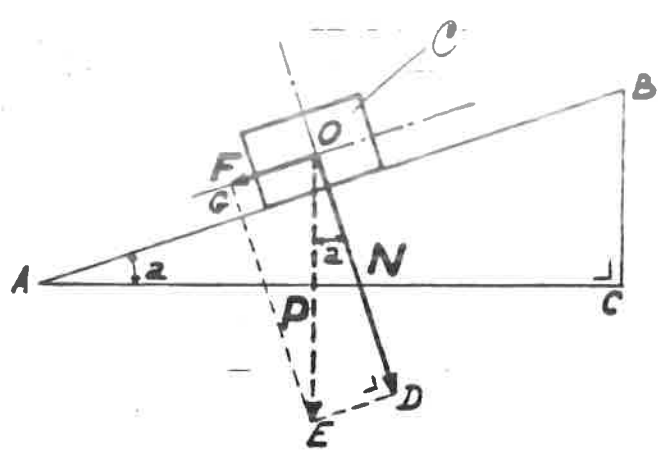


Fig. 143.

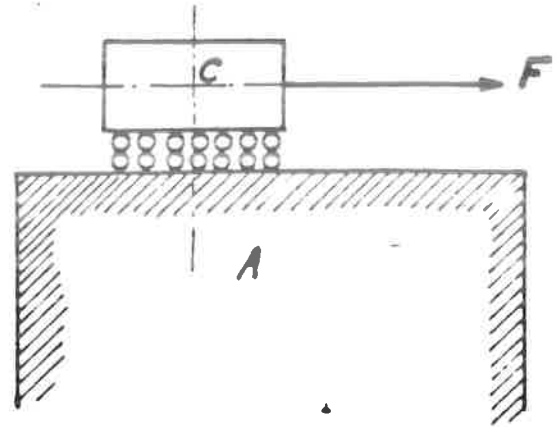


Fig. 144.

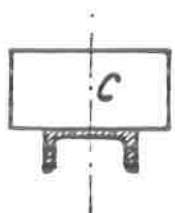


Fig. 145.

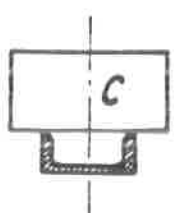


Fig. 146.

12.284/24.4.61(100)

23e Leçon. Chapitre 1. Les forces de frottement (suite).

1-3. Le frottement de roulement. Généralités.

Les roues du wagon frottent sur le rail. Nous le savons parce que :

- 1) pour faire rouler le wagon sur le rail, il faut développer un certain effort.
- 2) le wagon lancé s'arrête "tout seul", c'est à dire sans l'intervention d'aucune force extérieure.

Cependant, les roues ne glissent pas sur le rail; elles frottent, en roulant sur celui-ci.

Cet exemple est le cas-type du frottement de roulement.

Le roulement.

La fig. 147 montre une roue qui roule soit sur un rail, soit sur un chemin horizontal. En termes généraux, le croquis montre une roue se déplaçant sur un PLAN horizontal.

La réalité prouve que des corps indéformables n'existent pas et on constate que lorsqu'une roue roule sur un plan, elle doit constamment remonter une rampe.

Cette rampe est due à la pénétration de la roue dans le plan.

Le plan reprend généralement sa position primitive après le passage de la roue. Lorsque le plan est constitué en une matière tendre, il ne reprend pas sa position. C'est le cas d'un chemin boueux que la roue déforme. Elle trace alors une ornière.

Considérons une ^{147 ct}roue roulant sur un plan horizontal. Appliquons en O (fig. 148), centre de la roue de rayon r, une force F. Cette force F agit au bout du bras de levier r. Elle produit un couple de rotation qui vaut : $C = F \times r$. Ce couple est appelé couple moteur.

Au cours du déplacement de la roue, la matière du plan se déforme sous l'action du poids P de la roue. De cette déformation naît un couple résistant. Ce couple vaut le moment du poids P, soit $P \times d$. Ce moment constitue donc le couple résistant.

Pour assurer le roulement de la roue sur le plan, il suffit que le couple moteur équilibre le couple résistant:

$$F \times r = P \times d.$$

2.

La force F nécessaire pour assurer le mouvement vaut :

$$F = P \times \frac{d}{r}$$

Le rapport $\frac{d}{r}$ est appelé coefficient de résistance au roulement. Dans un but d'uniformité, toutes les expériences relatives au roulement ont été exécutées avec des roues de rayon $r = 1$ mètre.

Le rapport $\frac{d}{r}$ devient alors $\frac{d}{1}$ ou d .

Des ingénieurs ont recherché les lois de la résistance de roulement; ils ont réalisé des expériences que nous allons résumer ci-après :

1-3-1. Loi 1. Influence de la poussée normale du corps sur la résistance au roulement.

Observations.

Observez deux mêmes wagonnets Decauville sur une voie horizontale. L'un est vide, l'autre est chargé. Vous poussez plus facilement le premier que le second.

Des essais pratiques ont été faits. Ils prouvent que l'effort nécessaire pour vaincre la résistance au roulement ou pour remorquer :

1. un wagonnet vide pesant 2000N est de 50N (par exemple)
2. un wagonnet chargé pesant 4000N, l'effort est de 100N.
3. un wagonnet chargé pesant 5000N, l'effort devient 125N.

Ramenons l'expérience à une seule roue (fig.149). Pour chacun des cas, le poids pour une roue, ou poussée normale de la roue sur le rail, vaut respectivement :

$$\frac{2000}{4} = 500N; \quad \frac{4000}{4} = 1000N; \quad \frac{5000}{4} = 1250N. \text{ L'effort } F \text{ devient:}$$

$$\frac{50}{4} = 12,5N; \quad \frac{100}{4} = 25N; \quad \frac{125}{4} = 31,25N.$$

Le rapport, pour l'expérience 1, vaut $\frac{P_1}{F_1} = \frac{500}{12,5} = 40$

Pour la 2e expérience : $\frac{P_2}{F_2} = \frac{1000}{25} = 40$

Pour la 3e expérience : $\frac{P_3}{F_3} = \frac{1250}{31,25} = 40$

Généralisons:

Loi 1. La résistance au roulement est proportionnelle à la poussée normale exercée par le corps roulant sur un plan.

1-3-2. Loi 2. Influence du chemin de roulement.

Observation.

Reprenons l'exemple du wagonnet. Il est vide. Nous le déplaçons sur des rails horizontaux. L'effort nécessaire est très faible.

Dérailions le wagonnet. Nous allons essayer de le déplacer sur le sol. L'effort à fournir est beaucoup plus grand que dans le cas précédent. C'est avec grande peine que nous manœuvrons le wagonnet. Nous pouvons schématiser ce qui se produit à la figure 150.

La roue pénètre plus profondément dans le sol que dans le rail parce que le sol est moins dur et moins régulier que le rail.

Généralisons.

Loi 2. La résistance au roulement dépend de la nature et de l'état des surfaces de contact.

1-3-3. Loi 3. Influence de la vitesse.

Des expériences à différentes vitesses ont démontré que :

Loi 3. La résistance au roulement ne varie pas avec la vitesse.

1-3-4. Loi 4. Influence du rayon de la roue.

Observations.

Des essais ont été entrepris avec des roues de rayons différents. On a conclu de ces expériences que la résistance des roues de petit rayon était plus forte que la résistance des roues de grand rayon. Cela peut s'expliquer comme suit :

Soient deux roues de rayons différents, mais également chargées. Il est certain que la petite roue va pénétrer plus fort dans la surface de roulement que la grande (fig. 150). En effet, c'est ici qu'intervient la poussée unitaire ou poussée par unité de surface. Elle est appelée: pression, en mécanique. Sous l'effet de la pression plus forte, la roue pénètre dans le chemin de roulement et celui-ci se déforme plus. Exactement comme le clou à fine pointe s'enfonce plus facilement dans une pièce de bois, alors qu'il serait impossible d'y enfoncer une broche.

Loi 4. La résistance au roulement est inversement proportionnelle au rayon de la roue.

1-4. Frottement de glissement - Frottement de roulement.
Comparaison. Adhérence.

1-4-1. Expérience.

Un chariot est construit de telle sorte que sa partie A constitue la charge de poids P (fig. 151). Le châssis B, très léger, porte les quatre roues r. Le poids de B est négligeable si on le compare au poids P de A. A pose librement sur B. A peut glisser sur B.

Posons le chariot sur des rails horizontaux. Exerçons un effort manuel à l'aide d'un petit câble fixé à la partie A. Rien ne bouge. Augmentons l'effort. Pour une certaine valeur P, le chariot se met à rouler sur les rails. Cependant A a gardé sa position par rapport à B.

Conclusions.

- 1) Il n'y a eu aucun glissement de A sur B. A a fait corps avec B. On dit que A a entraîné le chariot par adhérence.
- 2) Lorsque le chariot roule sur les rails, il y a frottement de roulement. Le coefficient de frottement au roulement est d et l'effort nécessaire au démarrage du chariot vaut $F = P \times d$.
- 3) Pour entraîner A par glissement sur B, l'effort P est insuffisant. Il faudrait donc caler les roues et augmenter l'effort F pour atteindre l'effort $F' = P \times f$ nécessaire à démarrer une charge P par glissement sur ce plan horizontal.

Nous en déduisons que $F < F'$ et $Pd < Pf$ ou $d < f$

Remarque.

Notons que lorsque le chariot est en mouvement, l'effort à livrer P diminue, mais A ne glisse toujours pas sur B.

Conclusion.

Le coefficient de frottement au roulement est plus petit que le coefficient de frottement au glissement.

N.B. Chacun de vous sait par intuition qu'il est plus facile de rouler une charge que de la glisser. Quand une lourde charge doit être déplacée sans moyen de manutention, on place des rouleaux sous la charge et on réduit l'effort à exercer.

1-2. Traction des véhicules.

1) Soit la roue r d'un véhicule automoteur (fig.152) (par exemple: une locomotive, un autorail ou une automobile). Cette roue supporte une charge P . Entre cette roue et le rail ou, en général, le plan qui la porte, nous avons vu qu'il pouvait y avoir roulement. L'effort nécessaire à l'entraînement de la roue vaut :

$$F = P \times d$$

d étant le coefficient de frottement de roulement.

2) Si nous calons la roue, celle-ci ne pourra plus tourner. Elle glissera sur le rail, si nous appliquons un effort G qui dépasse l'effort

$$F' = P \times f$$

f est ici le coefficient de frottement de glissement.

3) Si nous décalons la roue et si nous appliquons l'effort $G > F'$ et $G > P$, la roue glissera et tournera en même temps.

Ce sera le cas d'une locomotive qui pivote : les roues motrices tournent et glissent sur le rail lorsque l'effort moteur G dépasse la valeur $P \times f$.

Pour éviter le phénomène, on essaye d'augmenter le plus possible les charges des roues motrices et accouplées. On arrive aussi à accroître f artificiellement en projetant du sable sur le rail.

Résumé.

1. L'effort moteur $F < P \times d$: aucun mouvement; les roues restent fixes.
2. L'effort moteur $F > P \times d$, mais $F < P \times f$: les roues roulent sans glissement.
3. L'effort moteur $F > P \times d$ et aussi $> P \times f$: les roues roulent et glissent en même temps.

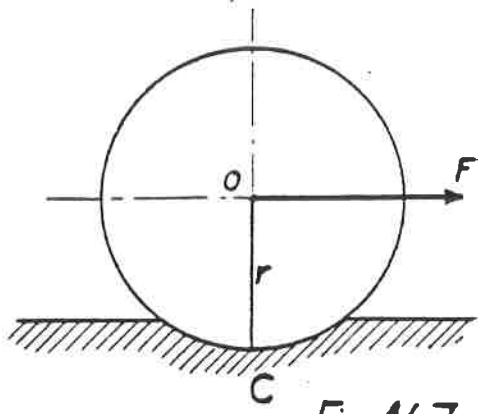


Fig. 147

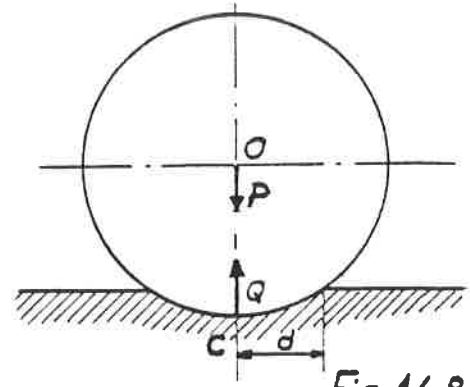


Fig. 148

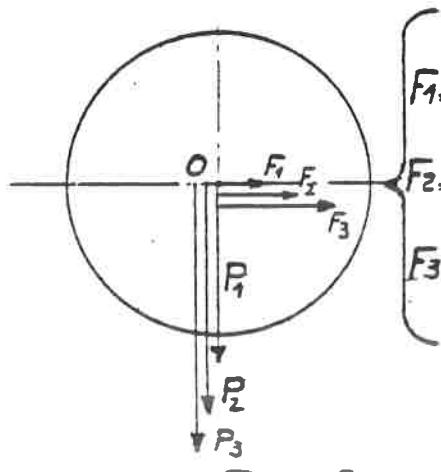


Fig. 149

$F_1 = 125 \text{ N}; P_1 = 500 \text{ N}$
 $F_2 = 250 \text{ N}; P_2 = 1000 \text{ N}$
 $F_3 = 3125 \text{ N}; P_3 = 1250 \text{ N}$

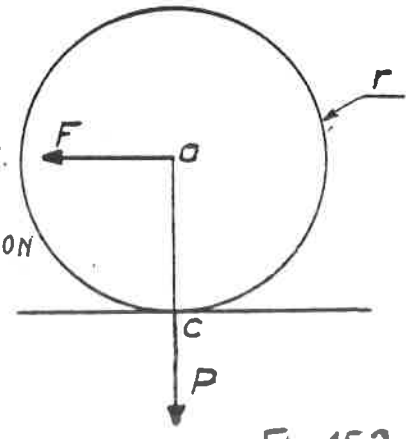
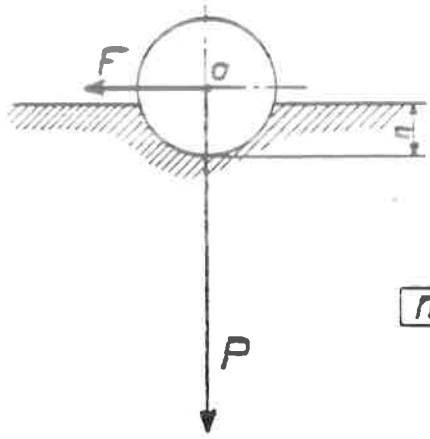


Fig. 152



$n > m$

Fig. 150

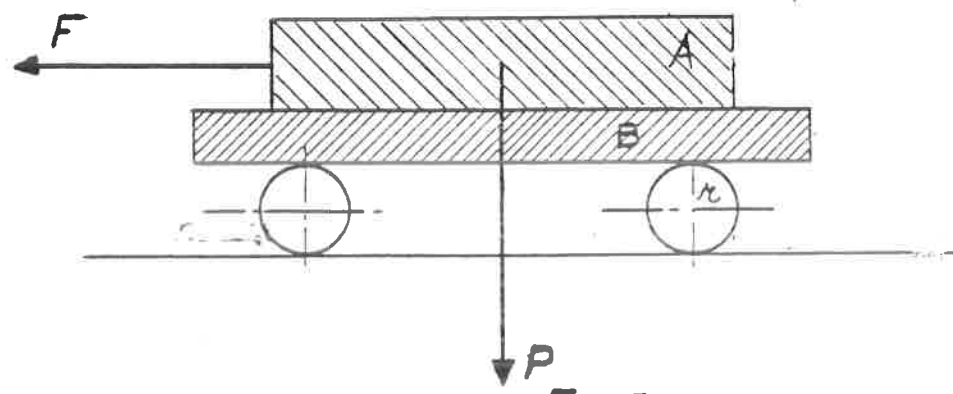
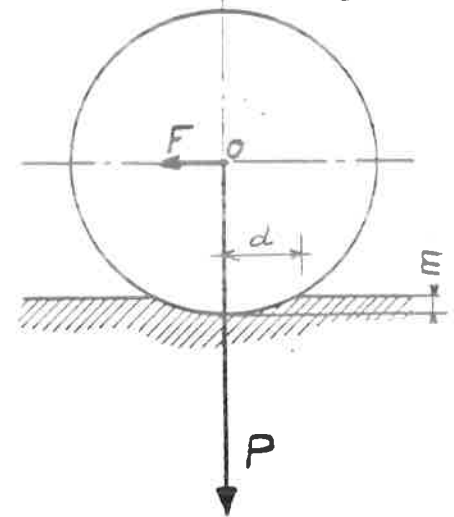


Fig. 151

(B) 284194. K. 67 (250)

2.1. Effort moteur. Effort résistant.

2.1.1. Observation 1.

Soulevons un objet quelconque à une certaine hauteur. L'objet est soumis à deux forces:

- 1) son poids propre
- 2) l'effort que nous exerçons pour l'élever.

Remarque: Notons que nous pouvons très bien fournir un certain effort sans parvenir à soulever l'objet.

Conclusions:

- 1) le poids de l'objet s'oppose au mouvement créé par la première force.
- 2) Le poids de l'objet ou la force qui s'oppose au mouvement est appelé: effort résistant.
- 3) L'effort que nous avons exercé pour produire le mouvement est dénommé: effort moteur.
- 4) L'effort qui tend à produire le mouvement sans y parvenir (voir remarque ci-dessus) est aussi appelé EFFORT MOTEUR.

Notion.

Supposons un système de forces qui sollicitent un corps. L'effort moteur est celui qui produit ou tend à produire le mouvement. L'effort résistant est celui qui s'oppose à cette action.

2.1.2. Observation 2.

Déplaçons l'objet de haut en bas:

L'objet est encore soumis à deux forces:

- 1) son poids propre.
- 2) l'effort que nous exerçons pour l'empêcher de tomber en chute libre.

Conclusions:

- 1) Le poids de l'objet est dans ce cas-ci l'effort moteur.
- 2) La force que nous exerçons pour empêcher la chute est l'effort résistant.

Notion.

Le poids d'un corps sollicité par une ou plusieurs forces est considéré comme effort moteur ou effort résistant selon qu'il favorise le mouvement ou qu'il s'y oppose.

2.1.3. Le travail. Définition.

Lorsque vous déplacez une charge sur une certaine distance, lorsque vous chargez de la terre dans une brouette, vous effectuez un travail.

1. Pour déplacer une charge, il faut fournir une force. La force est la première caractéristique du travail.

2. Pour que la charge se déplace, il faut que le déplacement ait lieu sur une certaine distance. Le chemin qu'elle parcourt est la seconde caractéristique du travail.

TRAVAIL = FORCE et CHEMIN PARCOURU.

Remarque.

Lorsque, pour déplacer une charge, nous fournissons un effort insuffisant pour la déplacer; la force ne produira mécaniquement aucun travail, car le déplacement est nul.

Si l'effort fourni est satisfaisant, l'effort moteur dépassera l'effort résistant (poids de la charge) et il y aura travail.

Principe:

Il y a travail quand l'effort moteur dépasse l'effort résistant afin de produire un effet utile (déplacement).

2.1.4. Mesure du travail.

1. Influence du chemin parcouru.

Soit un poids de 10 N. Nous l'élevons à une hauteur de 1 m. Appelons le travail produit: T.

Elevons-le ensuite à une hauteur de 2,00 m. = $2 \times 1,00$ m. Le travail produit pour élever le poids de 10 N à une hauteur de 2,00 m. sera deux fois plus grand que le premier et vaudra $2 \times T$.

Si nous élevons le même poids de 10 N à une hauteur de 5,00 m. ($5 \times 1,00$ m.), le travail produit sera 5 fois plus grand, soit $5 \times T$.

2. Influence de la force.

Représentons encore par T , le travail produit pour élever un poids de 10 N à une hauteur de $1,00\text{ m}$.

Élevons un poids de 20 N à la hauteur de $1,00\text{ m}$; le travail fourni vaudra $2 \times T$.

Si nous élevons un poids de 80 N à la même hauteur (1 m), le travail devient 8 fois plus grand. Il vaudra $8 \times T$.

Principe:

Le travail T d'une force F qui parcourt un certain chemin "e" est exprimé par le produit de la force par le chemin parcouru.

$$T = F \times e.$$

Remarque. Chemin parcouru e.

Exemple 1.

Un manoeuvre qui a été chargé d'élever une charge verticale de poids P au sommet d'un bâtiment de 8 m de hauteur (verticale) dispose de chemins différents; il peut monter à l'échelle, élever la charge avec un treuil ou par un escalier. Notons que ces chemins sont plus ou moins longs. En définition, c'est ici la hauteur de l'élévation qui compte et non pas le chemin parcouru par le manoeuvre.

Qu'il aille par l'échelle (parcours $11,00\text{ m}$), qu'il monte encore la charge par le treuil (parcours $8,50\text{ m}$), qu'il monte encore par l'escalier (parcours 15 m), il a monté la charge à 8 m de hauteur et, en fait, cela seul compte.

2.1.5. Unités de travail.

Puisque nous savons que :

$$T = F \times e$$

Ecrivons aussi :

Unité de travail = unité de force \times unité de longueur

Unité de travail = $\text{N} \times \text{m}$ ---> Nm (newtonmètre)

On dit également pour cette unité : le Joule (J)

Notion: Le Joule ou Nm est l'unité de travail produite par une force de 1 Newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction et le sens de la force.

4.

2.1.6. Formes du travail d'une force.

1. Le point d'application de la force se déplace suivant la direction de la force (fig. 152).

La force F se déplace de A en B . La distance $AB = e$.
Le travail T fourni par F est dans ce cas:

$$T = F \times e.$$

2. Le point d'application de la force se déplace perpendiculairement à la direction de la force.

La force F ne provoque aucun mouvement et ne produit pas de travail mécanique, car le déplacement " e " est nul.

3. Le point d'application de la force se déplace suivant une direction oblique à celle de la force (fig. 154).

Un tracteur T remorque un wagon W . Le tracteur se déplace sur un chemin parallèle à la voie. Il exerce un effort F suivant la direction du câble de traction. Le wagon se déplace de O en O_1 sur une distance: e .

La figure 155 représente schématiquement la force F et le déplacement de O en O_1 du wagon.

Quelle est la valeur du travail produit par la force F de remorque? Remarquons que le point O d'application de F se déplace suivant $O-O_1$ qui est de direction différente à la ligne d'action de F .

Décomposons F en deux forces concourantes en O , dont l'une G aura pour ligne d'action OO_1 . La ligne d'action de la 2^e force E sera la perpendiculaire à OO_1 en O (fig. 156).

Retenons que le travail de la résultante $F =$ Travail de $G +$ Travail de E . Le travail de E est nul car " e " est nul. En effet, si E était appliquée seule au wagon, celui-ci ne bougerait pas.

Le travail de $G =$ valeur de G multipliée par le chemin parcouru $OO_1 = e$. Examinons la fig. 156.

$G =$ projection de F sur le chemin parcouru OO_1 .

Principe:

Le travail d'une force dont le point d'application se déplace suivant une direction oblique par rapport à sa ligne d'action vaut le produit de la projection de la force par le chemin parcouru.

4. La ligne d'action de la force reste tangente à la circonférence de rayon R décrite par son point d'application.

Le point d'application de la force se déplace toujours suivant la direction de cette force, bien que cette direction varie à chaque instant (fig. 157).

Il s'agit donc d'un cas particulier du point 1 et $T = F \times e$.

Pour un déplacement de 1 tour, le chemin parcouru e vaut $2\pi \times R$ et le travail $T = F \times e$

ou $T = F \times 2\pi \times R$.

2.1.7. Travail moteur. Travail résistant.

Observation 1. Soulevons verticalement un poids de 20 N.

Constatation 1. Un poids de 20 N ou effort résistant a dû être vaincu en vue d'un effet utile = la levée du poids.

Le travail effectué pour soulever le poids est le travail moteur T_m .

Le travail effectué par le poids qui s'est déplacé verticalement dans un sens opposé est appelé travail résistant T_r .

Observation 2.

La poulie N de la fig. 158 est suspendue à un point fixe. On enroule un câble sur cette poulie. *A l'extrémité* A du câble, on suspend un poids de 20 N. *A l'extrémité* B, nous disposons le même poids P de 20 N. Le système reste immobile, il est en équilibre. Ajoutons un poids de 2 N au poids P suspendu en B; en B, nous avons maintenant l'effort $F = P + p = 20 + 2 = 22$ N. A se soulève; F a donc été capable de soulever P.

Déduction.

Tant qu'à chaque extrémité du câble nous avons un même poids P, rien ne se passe. L'effort moteur égale l'effort résistant.

Pour mettre le système en mouvement, nous avons appliqué un effort moteur F plus grand que l'effort résistant P ($F = P + p$).

Pourquoi?

1. La raideur de la corde entraîne un certain effort nécessaire à son entraînement, d'où un travail supplémentaire est fourni.
2. Il y a aussi frottement du galet sur son tourillon. Si nous adoptons un tourillon brut, au lieu d'une pièce polie, nous voyons que la poulie tourne avec plus de difficulté.
3. Le travail de l'effort moteur s'appelle travail moteur.

Le travail de l'effort résistant s'appelle le travail résistant. La travail utile est la différence entre T_m et T_r . $(T_m - T_r)$ ou encore le travail de p ($p = F - P$) a donc été nécessaire pour compenser toutes les pertes (frottement, raideur du câble ...). La perte, ou travail improductif, est appelé travail des résistances passives T_r . D'une façon générale, nous avons:

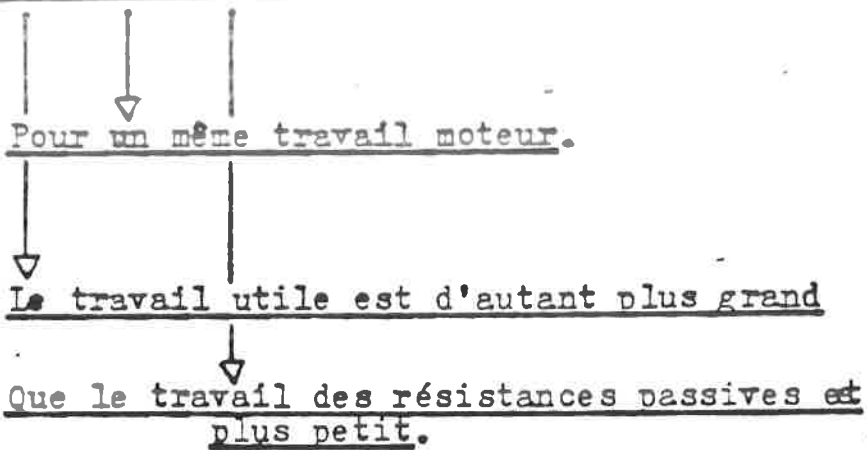
$$T_m = T_u + T_r.$$

Principe:

Dans les machines, le travail moteur vaut le travail utile augmenté du travail résistant.

2.1.8. Rendement d'une machine.

$T_m = T_u + T_r;$
 d'où $T_u = T_m - T_r$



Il y a toujours intérêt à réduire le plus possible le travail résistant = le travail des résistances passives.

Pour diminuer les résistances passives, il faut lubrifier les tourillons, les glissières. En général, il faut réduire au minimum tous les frottements.

On appelle rendement r , le rapport

$$\frac{T_{\text{utile}}}{T_{\text{moteur}}} = \frac{T_u}{T_m}$$

Remplaçons T_u par sa valeur $T_m - T_r$, la formule du rendement devient:

$$r = \frac{T_u}{T_m} \text{ devient } r = \frac{T_m - T_r}{T_m}$$

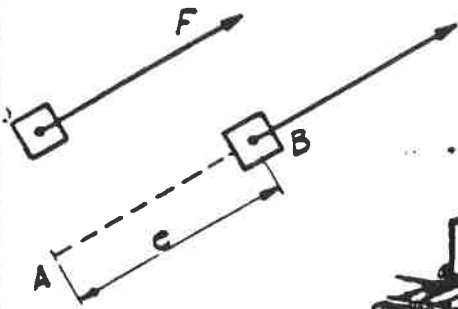


Fig. 153

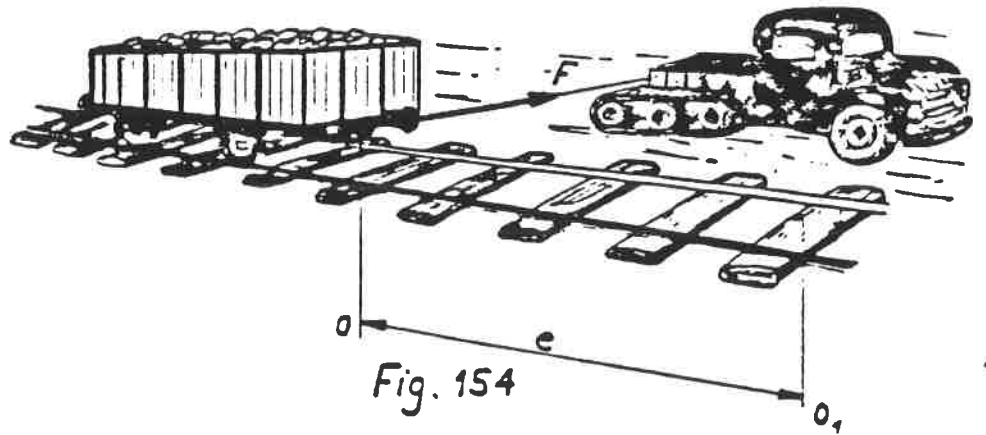


Fig. 154

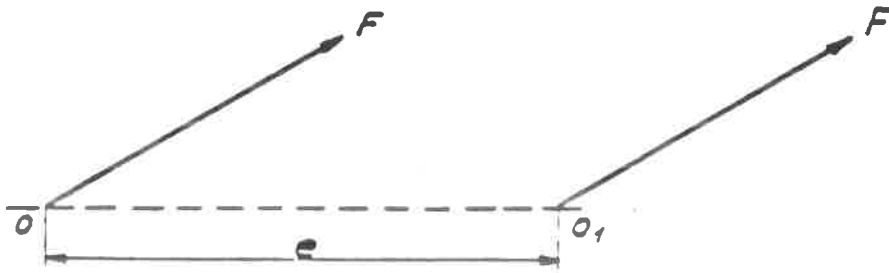


Fig. 155

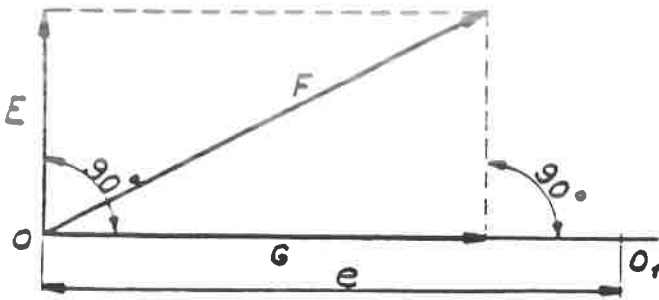


Fig. 156

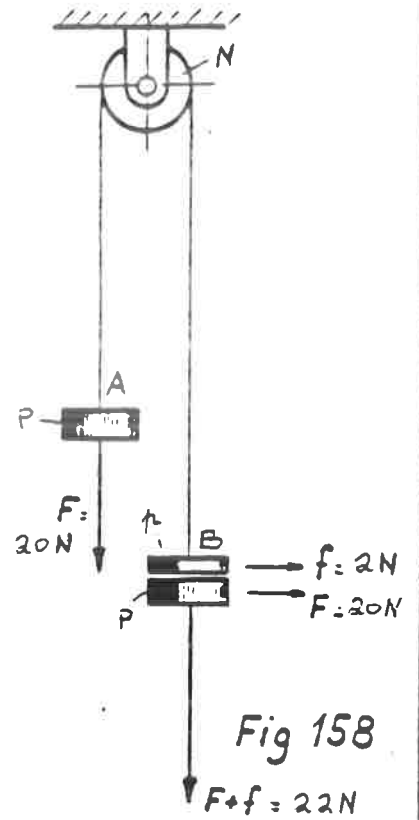


Fig 158

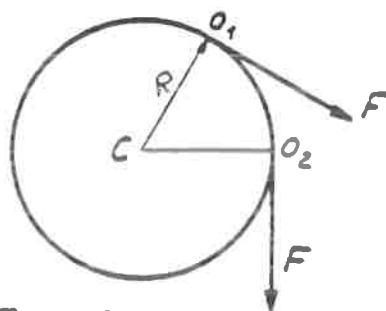


Fig. 157

CHAPITRE 3 : LA MASSE.

3.1 Généralités.

3.1.1.1 Mouvement d'un corps qui se déplace sous l'action d'une force constante.

Un corps est soumis à une force constante quand celle-ci ne subit aucune variation pendant son action.

Observation :

Une automobile démarre sur une route parfaitement horizontale et bien lisse. Elle part donc d'une vitesse égale à 0 et le conducteur appuie d'une façon constante sur l'accélérateur; ce qui signifie qu'une force constante pousse le véhicule.

Constatations :

L'automobile accélère, autrement dit :

Après la 1ère seconde, l'automobile possède une vitesse de 1,5 m/s.

Après la 2ème seconde, le moteur transmet toujours la même force. Cette force produira la même augmentation de vitesse que pendant la première seconde, soit encore 1,5 m/s.

A la fin de la 2ème seconde, la vitesse est :

1,5 m/s due à l'action de la force F pendant la 1ère seconde
+ 1,5 m/s due à l'action de cette même force F pendant la 2ème seconde, soit :

$$v = 2 \times 1,5 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s}$$

Pendant la 3ème seconde l'action F augmente à nouveau la vitesse de la même quantité c-à-d de 1,5 m/s.

A la fin de la 3ème seconde, la vitesse est :

$$v = 3 \times 1,5 \text{ m/s} = 4,5 \text{ m/s}$$

A la fin de la seconde t : la vitesse sera :

$$v = t \times 1,5 \text{ m/s} \text{ ou } 1,5 \text{ m/s} \times t$$

En désignant, la vitesse après la première seconde 1,5 m/s par a, nous aurons :

$$v = a \times t$$

C'est la formule du mouvement uniformément accéléré; a est appelé accélération.

2.

Notion :

Un corps qui se déplace sous l'action d'une force constante est animé d'un mouvement uniformément accéléré.

3.1.2 Mouvement d'un corps qui se déplace sous l'action de diverses forces.

Deux automobiles identiques sont pilotées par deux conducteurs qui, pour démarrer, appuient différemment sur l'accélérateur. Cela signifie que le premier utilise une force F d'avancement produite par le moteur.

Le second plus pressé que le premier, pousse la pédale à fond et fait produire au moteur une force F' deux fois plus grande que F.

La force F produit une accélération $a = 1,5 \text{ m/s}^2$

La seconde force $F' = 2 F$ produit une accélération a' double, c'est-à-dire de $3 \text{ m/s}^2 = 2 a$.

Il en sera de même pour une force de $3xF$, $4xF$,...

Nous pouvons écrire : $\frac{F}{2 F} = \frac{a}{2 a}$

$$\frac{F}{3 F} = \frac{a}{3 a}$$

$$\frac{F}{4 F} = \frac{a}{4 a}$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{a}{a'}$$

ou encore en intervertissant l'ordre des moyens :

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'}$$

Une force F'' produirait une accélération a''.

D'une façon générale et pour un même corps, nous avons :

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = \text{CONSTANTE}$$

Notion :

Soit un corps donné sollicité par des forces. Le rapport de ces forces aux accélérations qu'elles produisent est une constante.

3.2 La masse.

Pour un corps donné, on désigne le rapport constant F/a par le terme MASSE (m) du corps.

$$m = F / a$$

Notion :

La **MASSE** d'un corps est le rapport de la force appliquée au corps à l'accélération que cette force lui communique.

De $m = F / a$, on tire :

$$F = m \times a$$

Cette formule fixe la relation entre la force F -la cause- et l'accélération a -effet produit- sur la masse m du corps

Cette expression montre que lorsque la force est constante, l'accélération est d'autant plus petite que la masse du corps est grande.

Inversément, cette accélération est grande quand la masse du corps est petite.

3.3 La masse et l'accélération terrestre.

Lorsque la force sollicitant un corps est la pesanteur, nous savons que l'accélération qui en résulte est $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ pour nos régions.

La pesanteur est la force qui résulte de l'attraction de la terre sur tous les corps. L'expression de la masse devient alors :

$$m = P / g$$

L'accélération g est constante en un endroit donné. Ce qui explique que la force P est alors uniquement fonction de la masse du corps.

$$P = m \times g \quad \text{ou} \quad P = m \times 9,81$$

Cette force P est appelée "POIDS DU CORPS"

$$P = m \times g$$

L'accélération g n'est pas la même en tous les points du globe. Elle varie et, du même fait, P varie.

3.4 Comparaison entre le Poids et la Masse.

Le poids peut être mesuré par un dynamomètre. C'est une force qui, suivant sa grandeur, allonge plus ou moins le ressort de l'appareil.

Soient : P = le poids du corps en un endroit A . (1)

P_1 = son poids en un autre endroit B.

m = sa masse

P' = la valeur des poids étalons (1) en A

P'_1 = leur poids en B.

m' = leur masse constante

(1) La valeur des poids est établie à l'aide d'un dynamomètre.

4.

A l'endroit A où $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$$P = m \times 9,81$$

$$P' = m' \times 9,81$$

Nous concluons : $m = m'$

Au lieu B où $g = 9,82 \text{ m/s}^2$

$$P_1 = m \times 9,82$$

$$P'_1 = m' \times 9,82$$

Nous concluons : $m = m'$

Conclusion :

La balance permet donc de déterminer la masse d'un corps. Ses indications sont identiques en tous lieux.

Application n°1

1° Calculez la force F capable de communiquer à un corps d'un poids P de 150 N une accélération a de 4 m/s^2 . L'accélération due à la pesanteur vaut $9,81 \text{ m/s}^2$.

Solution :

Formule : Recherche de la masse M du corps $m = P/g$
Force $F = m \times a$, d'où $F = P/g \times a$

Unités : N, m, s

Valeur numérique : $F = \frac{150}{9,81} \times 4 = 60,15 \text{ N}$

○ Une force constante de 500 N agit horizontalement sur un corps de 2000 N reposant sur un plan horizontal. Calculez l'accélération communiquée.

Solution :

Formule : La masse du corps vaut $m = P/g$

$$\text{Donc } m = \frac{2000}{9,81} = 203,87 \text{ kg}$$

Sachant que $a = F/m$

$$\text{Nous obtenons } a = \frac{500}{203,87} = 2,45 \text{ m/s}^2$$

CHAPITRE 4 : LA PUISSANCE.

4.1 Notion de la puissance.

Exemples : 1° Deux ouvriers-manoevres transportent chacun un même nombre de briques à une certaine hauteur.
L'un a mis UNE HEURE pour effectuer ce travail.
Le second a réalisé le même travail en DEUX HEURES.

On dit que le premier est plus PUISSANT que le second.

2° Deux camions transportent une même charge d'un endroit à un autre distant du premier de 50 km. Un camion parcourt la distance en une heure. L'autre met deux heures pour atteindre la même destination.

On dit que le premier camion est plus puissant que le second

Conclusion :

La notion de puissance sert à comparer des travaux en faisant intervenir le facteur temps

Exemple :

Un pont roulant A élève une masse de 5000 kg à une hauteur de 10 m en 25 sec.

Un autre pont roulant élève la même masse de 5000 kg à la même hauteur de 10 m en 50 sec.

N.B. Nous prendrons pour g une valeur approchée de 10 m/s^2

$$\begin{aligned} \text{Le travail du pont roulant A} &= \text{Force} \times \text{déplacement} = m \times g \times e \\ &= 5000 \times 10 \times 10 = 500000 \text{ Nm} \\ &= 500000 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{La puissance de cet engin} = \frac{500000}{25} = 20000 \text{ J/s ou } 20000 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \text{Le travail du pont roulant B} &= \text{Force} \times \text{déplacement} = m \times g \times e \\ &= 5000 \times 10 \times 10 = 500000 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{La puissance de cet engin} = \frac{500000}{50} = 10000 \text{ J/s ou } 10000 \text{ W}$$

Le pont A est 2 fois plus puissant que le pont B.

Notion :

La puissance d'un moteur est égale à son travail par unité de temps.

6.

Unités de puissance :

$$\text{Puissance} = \frac{\text{Travail}}{\text{Temps}}$$

$$\frac{\text{Unité de travail}}{\text{Unité de temps}} = \frac{\text{J}}{\text{sec}} = \text{Watt}$$

Multiples :

Le kilowatt est l'unité pratique qui vaut 1000 W

4.2 Evaluation de la puissance en fonction de la force et de la vitesse

N.B. Cet exposé suppose que la ligne d'action de la force est parallèle ou coïncide avec sa trajectoire.

$$\text{Puissance} = \frac{\text{Travail}}{\text{Temps}} ; P = \frac{T}{t} \quad (1)$$

$$\text{Travail} = \text{Force} \times \text{chemin parcouru} ; T = F \times e \quad (2)$$

En remplaçant dans (1), T par sa valeur (2) on obtient :

$$P = \frac{F \times e}{t} \quad \text{ou} \quad P = F \times \frac{e}{t} \quad (3)$$

En cinématique, nous avons vu que : $e = v \times t$,

$$\text{d'où} \quad v = \frac{e}{t}$$

En remplaçant dans (3), $\frac{e}{t}$ par sa valeur v, nous obtenons :

$$P = F \times v$$

Conclusion :

La puissance exercée par une force agissant sur un corps, vaut le produit de la force par la vitesse qu'elle lui imprime.

Application 1 :

Une pompe centrifuge doit vider un étang contenant un volume V de 6000 m³ d'eau. On demande le travail de cette pompe sachant que l'eau de l'étang doit être refoulée à une hauteur h de 2 mètres.

Solution :

Formules : Travail = Force x déplacement.

Dans le cas de cette application :

Force = poids d'eau correspondant au volume V de 6000 m³.

Déplacement = hauteur h.

Unités : m, m³, kg

Application numérique :

Poids de 6000 m³ d'eau = Volume x masse par m³ x g

La masse spécifique de l'eau ou masse de l'unité de volume vaut :

1 kg/dm³ soit 1000 kg/m³

Poids des 6000 m³ d'eau = 6000 x 1000 x 10 = 60 000 000 N

La force vaut donc 60 000 000 N et le déplacement 2 m.

Le travail exécuté par la pompe vaut donc :

$$60\,000\,000 \times 2 = 120\,000\,000 \text{ J}$$

Application 2 :

On demande la puissance de la pompe de la 1ère application si l'on doit vider l'étang :

1° en 15 heures

2° en 120 heures

Evaluer cette puissance en 1° Watt
2° kW

Solution :

Formule : Puissance = Travail / temps

Unités : N, m, sec

Application numérique :

Travail = 120 000 000 J

Temps en seconde 1°) 15 x 3600 sec = 54 000 sec

2°) 120 x 3600 sec = 432 000 sec

Puissance (1er cas) $P_1 = \frac{120\,000\,000}{54000} = 2222,2 \text{ J/s}$
= 2222,2 Watt

Puissance (2ème cas) $P_2 = \frac{120\,000\,000}{432000} = 277,7 \text{ J/s}$ ou 277,7 Watt
= 0,277 kW

8.

Application 3:

Une force de 500 N imprime à un corps une vitesse constante de 33 m/s.
Calculez la puissance.

Solution :

$$P = F \times v$$

$$P = 500 \times 33 = 16500 \text{ J/s ou } 16500 \text{ W}$$

Application 4:

Une locomotive à vapeur possède les caractéristiques suivantes :

Diamètre du piston : 600 mm ---> 60 cm
Course du piston : 1000 mm ---> 1 m
Pression moyenne sur le piston : 5 bar
Vitesse de l'essieu moteur : 80 tours/min

Calculer la puissance en W et kW

Solution :

Formules : Puissance = $\frac{\text{Travail}}{\text{Temps}}$

$$\text{Travail} = \text{force de la vapeur} \times \text{déplacement piston}$$

$$\text{Force} = \text{poussée de la vapeur sur le piston}$$

F : surface du piston x pression moyenne.

Déplacement pour une course = longueur de la course

Déplacement pour 2 courses ou 1 tour : 2 fois la longueur de la course.

$$\text{Puissance} = \frac{\text{Travail}}{\text{Temps}}$$

Unités : kg, m, cm, s, cm², Nm, W, kW

Application numérique :

$$\text{Surface du piston} = \frac{3,14 \times 60^2}{4} = 2826 \text{ cm}^2$$

$$\text{Pression moyenne} = 5 \text{ bar} = 50 \text{ N/cm}^2 = 5000 \text{ hPa}$$

$$\text{Force} = \text{poussée sur le piston} = 2826 \times 50 = 141300 \text{ N}$$

$$\text{Travail pour une course} = 141300 \times 1 = 141300 \text{ J}$$

$$\text{Travail par minute} = 141300 \times 160 = 22\,608\,000 \text{ J}$$

$$\text{Puissance en W} = \frac{141300 \times 160 \times 1}{60} = 376800 \text{ W}$$

$$\text{Puissance en kW} = 376,8 \text{ kW}$$

CHAPITRE 4 Bis.TRAVAIL - ENERGIE.

Le travail est le produit d'une force par un déplacement.

$$T = F \times e$$

L'unité est le Newtonmètre ou Joule.

L'énergie a la potentialité de fournir un travail. On parle de source d'énergie par exemple le charbon, le pétrole, l'uranium, etc ... Même l'eau est une source d'énergie. Autrement dit, avec de l'eau, il est possible de fournir de l'énergie.

ENERGIE POTENTIELLE.

Une roche se trouvant sur le versant d'une montagne, contient de l'énergie. Quand cette roche tombe, elle peut faire beaucoup de ravage d'où la preuve qu'elle contenait de l'énergie.

L'énergie qu'avait cette roche sur le versant par rapport à la vallée est dénommée ENERGIE POTENTIELLE.

L'énergie potentielle est le résultat du produit de la force d'attraction terrestre exercée sur la roche par la hauteur de chute.

La force d'attraction exercée sur cette roche vaut la masse (m) multiplié par l'accélération terrestre. La hauteur de chute de la roche est représentée par h.

$$\text{L'énergie potentielle} = E_p = m \cdot g \cdot h$$

Un autre exemple de l'énergie potentielle est l'eau contenue derrière un barrage. L'énergie potentielle d'un mètre cube d'eau vaut :

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

Où h est la hauteur à laquelle se trouve le mètre cube d'eau par rapport au pied du barrage.

ENERGIE CINETIQUE.

Un corps en mouvement possède également de l'énergie. Cette énergie se nomme ENERGIE CINETIQUE.

Si l'on frappe un objet avec un marteau, l'effet sera d'autant plus grand que la masse de la tête du marteau ainsi que sa vitesse de déplacement seront plus grandes ou autrement dit que l'énergie cinétique de la tête du marteau sera grande.

L'énergie cinétique d'un corps vaut :

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

LOIS DE LA CONSERVATION DES ENERGIES.

Un objet lancé vers le haut possède durant son ascension de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

Plus cet objet montera, plus il possèdera de d'énergie potentielle (plus de hauteur) mais moins d'énergie cinétique (moins de vitesse - ralentissement).

Lorsqu'il arrivera à son point le plus haut, la vitesse sera réduite à zéro. A ce moment, l'énergie potentielle sera à son maximum et l'énergie cinétique sera nulle (vitesse = 0). Donc à cet instant :

$$E_p = m \cdot g \cdot h = \max$$

m = masse de l'objet
h = hauteur max. atteinte
v = 0 m/s

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = 0$$

Par la suite, le corps va retomber, et lors de l'impact au sol, l'énergie potentielle sera nulle (h = 0) et l'énergie cinétique sera quant à elle maximum (vitesse la plus élevée). Donc à cet instant, nous aurons :

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 0$$

m = masse
h = 0 (hauteur au sol)
v = max. de la vitesse

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = \max$$

On peut déduire qu'à un instant quelconque t₁, les énergies valent :

$$E_{p1} = m \cdot g \cdot h_1$$

v₁ et h₁ étant la vitesse et la hauteur à l'instant choisi.

$$E_{c1} = \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

La somme des deux types d'énergie à cet instant vaut :

$$\begin{aligned} \Sigma E &= E_p + E_c \\ &= m \cdot g \cdot h_1 + \frac{m \cdot v_1^2}{2} \end{aligned}$$

A un autre instant t₂, les formules ci-dessus restent toujours valables. L'énergie totale conserve la même valeur.

C'est la proportion entre E_c et E_p qui sera différente.
 L'énergie totale (potentielle + cinétique) E d'un objet est
CONSTANTE quelle que soit la hauteur et la vitesse de cet objet.

Un objet en mouvement sur lequel on n'exerce aucune force
 extérieure va conserver son énergie cinétique. C'est ainsi
 qu'une sonde interplanétaire se trouvant en dehors du champ
 d'action de l'attraction terrestre et des frottements peut se
 mouvoir sans apport d'énergie supplémentaire que celle acquise
 lors de la propulsion.

Unités pratiques :

Les unités pratiques utilisées sont :

-Nm	le Newtonmètre	--->	$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws}$
-Ws	le Wattseconde		
-kWh	le kilowattheure	--->	$1 \text{ kWh} = 3\,600\,000 \text{ Ws}$

6e leçon. Chapitre 5. La force centrifuge.

5.1. Rappel préliminaire.

5.1.1. Le radian : Traçons une circonférence du centre O et de rayon R (fig. 159).

D'un point A, nous portons sur la circonférence, une longueur AB égale au rayon R - Joignons A & B à O.

Notion : L'angle compris entre les rayons OA & OB est appelé "radian".

5.1.2. Valeur du radian.

Combien de radians y a-t-il dans 360° ? L'angle de 360° est l'angle au centre qui embrasse toute la circonférence. La longueur de cette circonférence vaut $= 2\pi \times R$

A une longueur R correspond un angle de 1 radian.

A la longueur $2\pi \times R$ correspond un angle 2π fois plus grand, soit 2π radians ou 360° ;

donc, 2π radians = 360° .

Un radian est donc contenu 2π fois dans 360° ; c'est-à-dire 6,28

d'où,

$$\text{Valeur du radian} : \frac{360^\circ}{6,28} = 57^\circ 11' 41''$$

5.2. Vitesse angulaire.

5.2.1. Définition : Faisons tourner sur la circonférence de centre O un mobile comme une pierre liée à une corde que nous ferions tourner autour d'un point fixe.

Le rayon R aboutissant à ce mobile se déplace avec lui et balaye par exemple un angle de 25 radians en 50 secondes.

L'angle balayé (ou espace parcouru) vaut 25 radians.

Le temps est de 50 secondes.

La vitesse vaudra : $\frac{\text{espace parcouru}}{\text{temps}} = \frac{25 \text{ radians}}{50 \text{ secondes}} =$

0,5 radians : s

Cette vitesse s'appelle vitesse angulaire, elle s'écrit " ω ".

Notion : La vitesse angulaire " ω " est l'angle balayé par un rayon en une seconde.

5.2.2. Rapport entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire.

Supposons un plateau de manège (fig. 160).

Soient deux points P_1 & P_2 choisis sur un même rayon.

P_1 se trouve à une distance R du centre O (rayon $OP_1 = R$).

P_2 se trouve à une distance r de O (rayon $OP_2 = r$).

Faisons tourner le plateau.

Après un quart de tour P_1 & P_2 se trouvent tou-

jours sur le même rayon; α est l'angle correspondant balayé par le rayon.

Cet angle est le même pour les deux points P_1 & P_2 .

Après deux tours, il en est de même.

Faisons tourner le plateau à raison de 20 tours par minute, soit $\frac{20}{60}$ tours : seconde ou $\frac{1}{3}$ tour / s.

Les angles balayés par le rayon sur lequel se trouvent P_1 & P_2 sont donc les mêmes.

Cela signifie que la vitesse angulaire de ces points est la même.

Calculons - la :

A 1 tour correspondent 2π radians

A $\frac{1}{3}$ tour correspondent $\frac{2\pi}{3}$ radians

La vitesse angulaire w vaut $\frac{2\pi \text{ radians}}{3} / \text{seconde} = 2,09 \text{ radians / s}$

Pendant que le point P_1 tourne autour de O à raison de 2,09 radians : s, il parcourt un certain chemin. Ce chemin est réalisé à une certaine vitesse V mètres par seconde.

A chaque radian correspond une longueur d'arc égale au rayon R .

A 2,09 radians correspondent 2,09 fois le rayon R . Quand le rayon $OP_1(R)$ a balayé 2,09 radians en une seconde, le point P_1 a parcouru sur la circonférence:

2,09 fois le rayon R . D'où, la vitesse V de déplacement de P_1 sur la circonférence vaut

$$V = 2,09 \times R. \text{ Supposons } R = 0,20 \text{ m} . V = 2,09 \times 0,20 = 0,418 \text{ m / s}$$

Pendant ce temps-là, le point P_2 a parcouru aussi 2,09 fois le rayon $OP_2 (r)$.

Supposons $r = 0,10 \text{ m} - v = 2,09 \times 0,1 = 0,209 \text{ m / s}$.

Conclusions.

1. P_1 & P_2 ont donc la même vitesse angulaire,
2. P_1 & P_2 ont des vitesses linéaires V & v différentes,
3. D'une façon générale, la vitesse linéaire est proportionnelle au rayon

$$V = w \times R \quad (1)$$

5.2.3. Relation entre la vitesse angulaire et le nombre de tours.

Nous avons vu en cinématique que la vitesse linéaire v (en m : s) d'un point disposé à une distance R du centre de rotation et tournant à raison de n tours : minute valait :

$$v = \frac{2\pi \times R \times N}{60} \text{ ou } \frac{\pi \times R \times N}{30} \quad (2)$$

Remplaçons dans la relation (1) $v = W \times R$, la valeur v trouvée dans (2)

$$\frac{\pi \times R \times N}{30} = \pi \times R$$

$$\text{d'où } \pi = \frac{\pi \times R \times N}{30 \times R} = \frac{\pi \times N}{30}$$

$$\boxed{\pi = \frac{\pi \times N}{30}}$$

5.3. La force centrifuge - Définition.

5.3.1. Observations.

a) Faisons tourner un petit seau (fig. 161) rempli d'eau. Le seau tourne dans un plan vertical. Quand le seau se déplace suivant ACB, l'eau ne s'écoule pas du seau, même lorsque celui-ci est en C.

Dans cette position, deux forces sollicitent le liquide :

- 1) le poids de l'eau (force due à la pesanteur) qui a tendance à faire s'écouler l'eau.
- 2) une autre force opposée et plus grande que la première empêche l'eau de s'écouler. Cette force maintient l'eau dans le seau.

b) Nous plaçons sur le plateau horizontal de l'appareil de la fig. 162, un objet quelconque (écrou, canif, crayon).

Au repos, l'objet reste immobile sur le plateau. Faisons tourner le plateau lentement, l'objet reste immobile.

Faisons tourner le plateau rapidement, l'objet quitte le plateau, il est chassé vers l'extérieur du plateau sous l'effet d'une force.

Comme dans l'expérience a), l'objet est soumis à deux forces.

- 1) son poids propre (effet de la pesanteur) qui s'exerce sur le plateau et tend à l'y maintenir,
- 2) une force qui combat l'effet de la pesanteur. Cette force écarte l'objet du centre du plateau.

5.3.2. Notion.

Tout corps qui tourne (rotation) autour d'un point (centre de rotation) est sollicité par une force. Cette force tend à éloigner le corps du centre de rotation. Elle est appelée force centrifuge.

5.4 Valeur de la force.

5.4.1. Observation.

a) Au point O de l'appareil décrit à la fig. 163, nous attachons une sphère S de poids = 2 N. Un dynamomètre (ressort) r a été intercalé entre O & S.

4.

La tige T est un guide. Elle porte des graduations et elle peut coulisser librement dans le trou t du support V .
 Faisons tourner le plateau et en même temps la sphère S .
 L'ensemble tourne à raison de 100 tours : minute.
 La force centrifuge entraîne la sphère et l'écarte du point O en même temps que T .
 Nous lisons une certaine graduation sur la tige T qui traduit l'intensité F_1 de la force centrifuge.

- b) Nous remplaçons la sphère S de $2N$ par une sphère de $4N$.
 L'intensité F_2 enregistrée par T vaut $2 \times F_1$.
- c) Doublons la distance d en intercalant un petit câble entre O et le ressort r et recommençons l'expérience ci-dessus avec la sphère de $2N$.
 La force centrifuge F_3 enregistrée vaut $2 \times F_1$.
 L'épreuve est faite alors avec la sphère de $4N$.
 La force centrifuge F_4 vaut $2 \times F_2$.
- d) Si nous reprenons encore la sphère de $2N$ et au lieu d'une rotation de 100 tours : minute, nous adoptons un nombre de tours de 150 par minute, l'intensité augmente fortement.
 On démontre que cette intensité augmente comme le carré de la vitesse angulaire.

Conclusions:

La force centrifuge est proportionnelle à la masse du corps considéré.
 Elle est proportionnelle au carré de sa vitesse angulaire.
 Elle est aussi proportionnelle au rayon de la circonférence décrite.
 Elle est proportionnelle à ces 3 facteurs, elle l'est donc à leur produit $F = M \times \omega^2 \times R$ ou encore en remplaçant M par sa valeur $\frac{P}{g}$: $F = \frac{P}{g} \times \omega^2 \times R$ ou $F = \frac{P}{g} \times \frac{V^2}{R}$ (1)

5.5. Force centripète.

Lorsque nous faisons tourner un objet, l'écrou par exemple, autour de notre main, nous sentons très bien la force centrifuge exercée par la pièce tournante. Pendant que l'objet tourne, nous devons exercer une force directement opposée à la force centrifuge. Cette force s'appelle : force centripète.
 Qu'arrive-t-il si, à un moment donné, nous cessons d'exercer cette force ?
 La force centrifuge cesse d'agir; en effet, notre main n'exerce plus aucun effort. Le corps file suivant une ligne droite. Il prend une trajectoire rectiligne. Cette trajectoire est dessinée à la figure 164. On observe qu'elle est tangente à la circonférence décrite pendant le mouvement circulaire.

(1) $v = \omega \times R$; $\omega = \frac{v}{R}$; $\omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$, d'où : $F = M \times \frac{v^2}{R^2} \times R = M \times \frac{v^2}{R}$

Notions.

Pendant que le corps tourne, les forces centrifuge et centripete s'équilibrent.

Cela signifie qu'elles sont égales et opposées.

Dès qu'un corps n'est plus relié à son centre de rotation, la force centrifuge cesse d'agir.

Le corps cesse de tourner.- Il prend alors une trajectoire rectiligne.

Cette trajectoire est tangente à la circonférence que le corps décrivait.

A titre d'exercice, recherchez quelques effets et applications de la force centrifuge.

1er Problème. Une masse de 50 N est fixé au bout d'un levier de 0,50 m.

Cet ensemble tourne:

1° à raison de $N_1 = 60$ tours : minute.

2° à raison de $N_2 = 240$ tours : minute.

Recherchez la valeur de la force centrifuge développée dans chaque cas.

Solution.

Formules. $F = M w^2 R$

w = vitesse angulaire

N = nombre de tours : minute

vitesse angulaire w en radians : seconde

$$w = \frac{2 \pi N}{60} = \frac{\pi N}{30}$$

Unités m, Kg, s.

Applications numériques.

$$1. \quad w_1 = \frac{\pi \cdot N_1}{30} = \frac{3,14 \times 60}{30} = 6,28 \text{ radians : s.}$$

$$w_1^2 = 6,28^2 = 39,44$$

$$F_1 = 5 \times 39,44 \times 0,5 = 98,6 \text{ N.}$$

2.

$$w_2 = \frac{\pi \cdot N_2}{30} = \frac{3,14 \times 240}{30} = 25,12 \text{ radians : s}$$

$$w_2^2 = 25,12^2 = 631,01$$

$$F_2 = 5 \times 631,01 \times 0,5 = 1577,5 \text{ N.}$$

2ème Problème. Un rotor d'alternateur électrique pèse 7.5000N . Il tourne à raison de 1500 tours : minute.

Supposons que ce rotor soit excentré de $0,1\text{ mm}$ (excentrage = distance entre axe de rotation et centre de gravité).

Solution.

Formules. $F = M \omega^2 R$

$$M = \frac{P}{g}$$

$$\omega = \frac{\pi N}{30}$$

Valeur numérique.

$$\omega = \frac{3,14 \times 1500}{30} = 157 \text{ radians : s.}$$

$$\omega^2 = 157^2 = 24649$$

$$F = \frac{75000}{9,81} \times 24649 \times 0,0001 = 1.8844,50 \text{ N.}$$

Chapitre 6.- L'Energie.

6.1. Définition de l'Energie.

6.1.1. Observations.

1. Soulevons un poids P de 50N à une hauteur de 2.00 m . Le travail à fournir pour élever ce poids vaut $T = P \times h = 5 \times 2 = 100\text{Nm}$. Quand ce poids de 50N se trouve à 2.00 m de hauteur, il serait possible de le libérer et de le laisser tomber en chute libre. Le travail accompli par ce corps vaudrait aussi $T = P \times h$.

Au moment où le corps est à 2.00 m de hauteur, il possède une qualité qu'il n'avait pas au niveau du sol: il est dans un état tel qu'au moment choisi par nous, il fournira un travail T .

Conclusions. 1. Le corps est au repos.

2. Le corps a accumulé une réserve de travail.

2. Soit un ressort à boudin qui est utilisé dans un dispositif de fermeture automatique de porte. Lorsque nous ouvrons la porte, nous allongeons le ressort, nous avons fourni un certain travail. La porte est ouverte. Lâchons-la. Elle se referme sous l'action du ressort. Celui-ci accomplit le même travail que le nôtre, mais en sens inverse. Le ressort referme la porte lorsque nous le décidons.

Conclusion: "Le ressort a accumulé" une réserve de travail. Il est à ce moment au repos.

6.1.2. Notion.

Les observations (1) et (2) prouvent qu'il est possible d'accumuler le travail, d'en faire une réserve

sur des corps au repos et d'en disposer quand nous le désirons.

Une telle réserve de travail s'appelle ENERGIE.
L'énergie est une forme de travail. Quand cette
énergie est fixée sur des corps au repos, on l'appelle
ENERGIE POTENTIELLE.

6.1.3. Observations.

Lançons un wagonnet Decauville sur une voie horizontale. Après un certain temps, nous poussons le wagonnet à une vitesse de 10 km : heure. Lâchons-le. Le wagonnet continuera à rouler pendant un certain temps. Il parcourra encore seul un chemin de 25 m. par exemple.

Au moment où nous le lâchons, il est capable de
fournir un certain travail T.

Le wagonnet a accumulé du travail. Comme il s'agit
toujours de travail mis en réserve, on appelle
aussi cette réserve de travail : "Energie".

- Le poids élevé à la hauteur h et le ressort comprimé des premières observations étaient au repos. Par contre le wagonnet est resté en mouvement. Cette énergie s'applique à un corps en mouvement; on la qualifie de cinétique. Il s'agit donc ici
d'ENERGIE CINETIQUE.

6.2. Transformation de l'énergie.

Le poids de 50N soulevé à une hauteur de 2,00 m. possède donc une certaine énergie potentielle P x h. Lorsque nous le libérons, il se met en mouvement. Au moment où il va prendre contact avec le sol, il est capable d'assurer un certain travail, exactement comme le wagonnet lancé continuait sa course. A ce moment, il possède de l'énergie cinétique. L'énergie potentielle P x h s'est transformée en
énergie cinétique.

6.3. Expression de l'énergie cinétique.

Il est intéressant de pouvoir évaluer l'énergie cinétique d'un corps se déplaçant à une certaine vitesse. Considérons le poids de 50N tombant d'une hauteur h = 2,00 m.

Au sol, la vitesse du poids vaudra $v = \sqrt{2g \times h}$ (voir 4^e leçon, p 5)

Le travail admis par le poids tombé de la hauteur h vaut : $T = P \times h$ (1)

Ce travail s'est transformé en énergie cinétique.

De l'expression : $v = \sqrt{2g \times h}$, tirons h
 $v^2 = 2g \times h$ d'où $h = \frac{v^2}{2g}$ (2)

En remplaçant dans (1) h par sa valeur trouvée ci-dessus (2); nous aurons

$$T = P \times \frac{v^2}{2g} = \frac{P}{g} \times \frac{v^2}{2} \quad (3)$$

$$\text{or } \frac{P}{g} = M \text{ (masse du corps)}$$

Dès lors,
$$T = \frac{M \times v^2}{2}$$

Notion.

L'énergie cinétique d'un corps de masse M animé d'une vitesse v est égale au demi produit de la masse par le carré de la vitesse.

6.4. Travail dû à la variation de la vitesse d'un corps.

L'expression $T = \frac{M \times v^2}{2}$ permet de calculer le travail résultant de la variation de vitesse d'un corps.

En effet, supposons un corps animé d'une vitesse initiale V_0 à un moment t_0 et soit V_1 , la vitesse d'un corps en mouvement après un certain temps à un moment t_1 .
A la vitesse V_0 , l'énergie cinétique T_0 vaut $T_0 = \frac{MV_0^2}{2}$

A la vitesse V_1 , l'énergie cinétique vaut $T_1 = \frac{MV_1^2}{2}$

La différence des deux énergies vaut :

$$T_1 - T_0 = \frac{MV_1^2}{2} - \frac{MV_0^2}{2} = \frac{M}{2} (V_1^2 - V_0^2)$$

Si le mouvement est accéléré, c.à.d. si $V_1 > V_0$, $T_1 - T_0$ est positif, c.à.d. que le travail doit être fourni par une force extérieure.

C'est le cas de la mise en mouvement d'une machine.

Si le mouvement est retardé, c.à.d. si $V_1 < V_0$, $T_1 - T_0$ est négatif; le travail est alors fourni.

C'est le cas du ralentissement et l'arrêt d'une machine.

Applications.

1. Un train de masse = 700 tonnes (locomotive comprise).
Le train roule à une vitesse V de 80 Km : h. A un certain moment, le machiniste serre les freins. L'effort F de freinage vaut 500000 N. On demande le chemin parcouru par le train avant son arrêt.

Solution.

a) données : $m = 700 \text{ T. ou } 700.000 \text{ kg}$

$$V = 80 \text{ Km : h ou } \frac{80}{3,6} = 22,2 \text{ m : s}$$

$$F = 500000 \text{ N}$$

b) inconnue : espace $e = ?$

c) formules.

L'arrêt sera réalisé lorsque l'énergie cinétique due à l'effort des masses en mouvement sera égale au travail de frottement résultant de l'effort de freinage.

$$\text{Energie cinétique} = \frac{Mv^2}{2}$$

$$\text{Travail de frottement} = F \times e \quad \left(\begin{array}{l} F = \text{force de frottement} \\ e = \text{chemin parcouru.} \end{array} \right)$$

Nous avons l'égalité :

$$\frac{M \times v^2}{2} = F \times e \text{ d'où } \frac{M \times v^2}{2F} = e$$

d) Applications numériques.

$$e = \frac{700.000 \times 22,2^2}{2 \times 500000} = \frac{700.000 \times 494}{2 \times 500000} = 345,8 \text{ m}$$

Le convoi parcourra encore 345,8 m. après que le machiniste aura serré les freins.

5. Un forgeron travaille avec un marteau-frappeur d'une masse $M = 10 \text{ Kg}$. Ce marteau atteint une vitesse de 6 m/s au contact de la pièce. Calculez l'énergie emmagasinée dans ce marteau ?

Solution.

a) Données : masse $M = 10 \text{ Kg}$
 $v = 6 \text{ m/s}$

b) Formule. inconnue : Energie $E = \frac{M \times v^2}{2}$

c) Applications numériques :

$$\text{Energie } E = \frac{10 \times 36}{2} = 180 \text{ Nm}$$

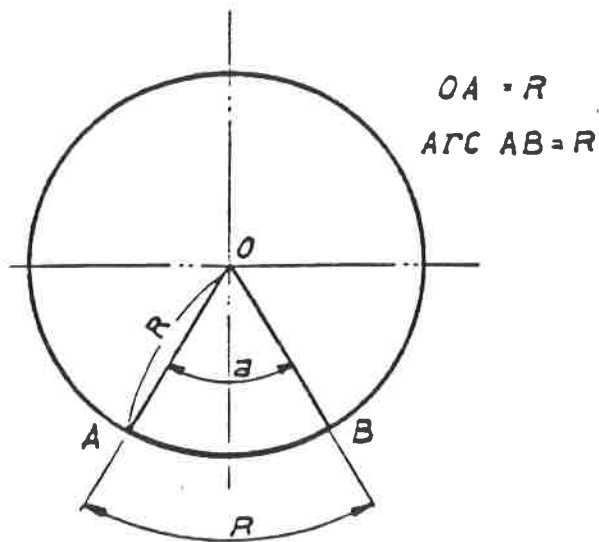


Fig. 159

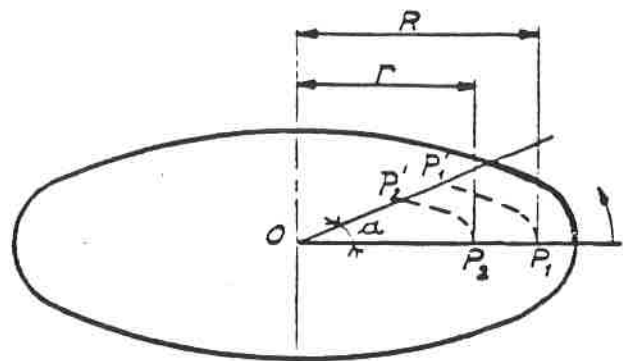


Fig. 160

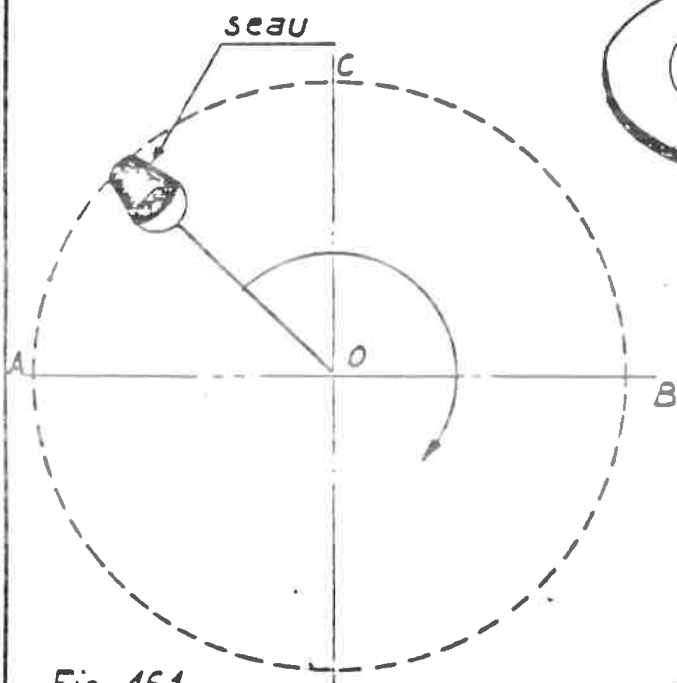


Fig. 161

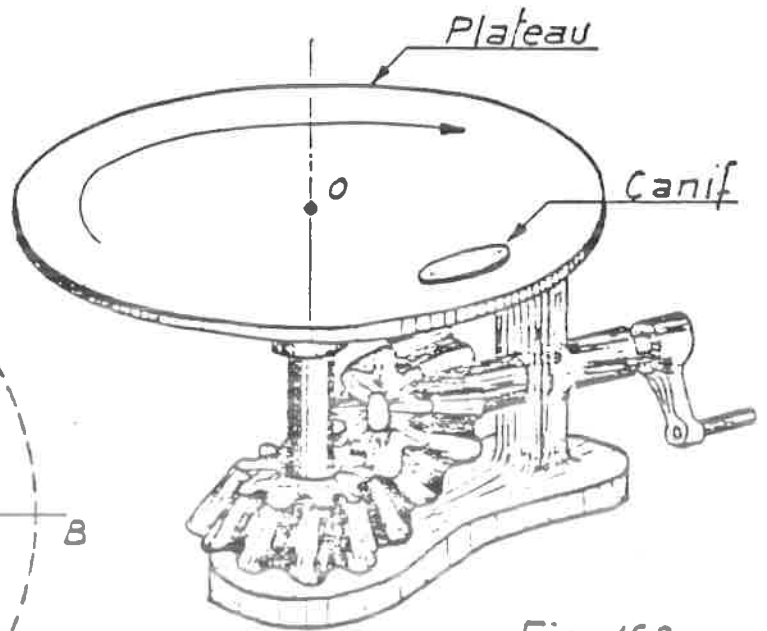


Fig. 162

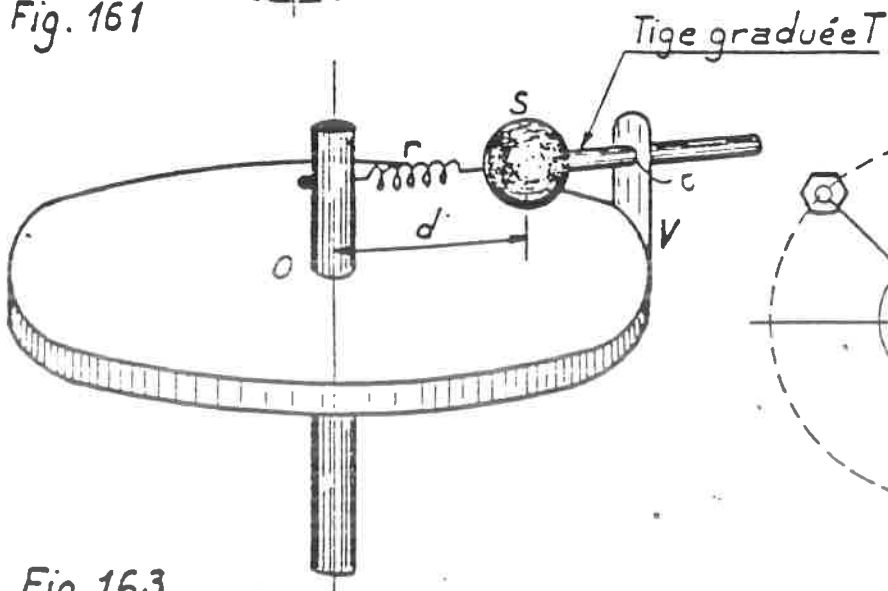


Fig. 163.

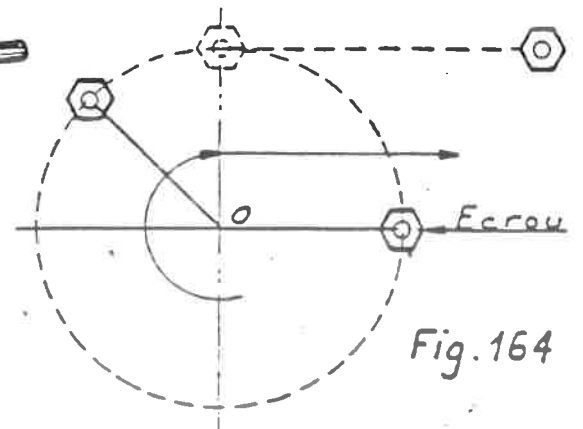


Fig. 164

Chapitre 7 - Les machines simples.

7.1. Généralités.

7.1.1. Définitions.

Les machines simples sont des systèmes soumis à des liaisons. Ordinairement, deux forces sont en jeu.

La première force, motrice ou effort moteur P qui tend à mettre le système en mouvement.

L'autre force, résistante ou effort résistant Q qui s'oppose à la première.

7.1.2. Remarque.

Dans certains ouvrages de mécanique, la première est appelée puissance, l'autre résistance.

Ces termes erronés sont conservés par habitude.

Toutefois, nous n'employerons pas ces dénominations qui prêtent à confusion.

7.2. Principe utilisé dans l'étude des machines simples. Rappel.

7.2.1. Machines en équilibre.

Dans l'étude de la 2ème partie du cours : LA STATIQUE, nous avons étudié la condition :

Pour qu'un système de deux ou plusieurs forces agissant dans un même plan soit en équilibre, il faut que la somme algébrique des moments de toutes les forces, par rapport à un point quelconque du plan soit égale à 0.

Nous avons vu plus haut que cette condition pouvait s'exprimer $\sum M_o + = - \sum M_o -$.

Cette condition peut s'appliquer à une machine simple en équilibre.

7.2.2. Machines en mouvement.

Une machine en mouvement est aussi sollicitée par deux forces.

Supposons qu'il n'y ait aucun frottement dans le mécanisme de cette machine.

La condition d'équilibre statique ci-dessus n'est plus applicable, étant donné l'état de mouvement.

Supposons la machine dans un état de mouvement uniforme. Elle est soumise à deux forces P & Q. Le mouvement va se maintenir en vertu du principe de l'inertie.

Dans ces conditions, le travail produit par l'effort moteur vaut celui de l'effort résistant.

Notion. La notion précédente s'appelle "notion de l'équilibre dynamique".

Cette condition peut s'écrire sous une forme mathématique :

Soient : P : l'effort moteur.

Q : l'effort résistant.

e : déplacement ou espace parcouru par l'effort moteur.

e' : déplacement ou espace parcouru par l'effort résistant.

Dans une machine sans frottement, nous avons donc :

Travail de l'effort moteur = travail de l'effort résistant.

Travail = Force x déplacement.

Effort moteur x son déplacement = Effort résistant x son déplacement.

$$P \times e = Q \times e' \quad (1)$$

$$\text{ou } \boxed{\frac{P}{Q} = \frac{e'}{e}} \quad (2)$$

Conclusion. L'expression (2) démontre que lorsque l'effort moteur est plus petit que l'effort résistant, le chemin parcouru par l'effort moteur est plus grand que celui de l'effort résistant.

7.3. Etude des machines simples.

7.3.1. Les leviers.

7.3.1.1. Levier interappui.

1. Définitions.

Pour soulever une lourde charge, vous avez tous utilisé le levier de la figure 165. Une cale c est placée près de la charge Q. - Q est l'effort résistant.

Une extrémité du levier l est placée en A sous la charge Q à soulever. La barre pose sur la cale c en un point O.

En B, nous appliquons un effort musculaire P, de façon que sous l'action P, Q se soulève. P est l'effort moteur.

La figure 166 montre l'ensemble schématique des forces (P, Q) sollicitant le levier.

Remarquons que le point d'appui O est situé entre la force motrice P et la force résistante Q.

C'est pour cette raison que le levier est appelé levier interappui.

2. Equilibre statique.

Pour que le levier soit en équilibre, il faut que la résultante R des forces P et Q passe le point O.

A son tour, cette résultante doit être équilibrée par une force de même direction de sens opposé et de même intensité. Cette force s'appelle équilibrante de R. Elle est la réaction de la cale c au point O. C'est la réaction de l'appui O.

Cette condition peut s'exprimer mathématiquement :

La somme algébrique des moments des forces P et Q par rapport au point O est nulle.

$$MoP + MoQ = 0$$

$$P \times OB = - Q \times OA$$

Seule, la valeur numérique des forces nous intéresse.

Nous devons donc faire abstraction du signe (-) caractérisant le sens de l'effort Q.

Conclusion.

$$P \times OB = Q \times OA$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{OA}{OB}$$

Conclusion.

Dans le levier interappui, les forces P et Q sont en raison inverse de leur bras de levier.

La réaction de l'appui O vaut : $R = P + Q$

3. Equilibre dynamique.

Nous supposons que le levier AB se déplace, c'est le cas d'ailleurs du soulèvement de la charge Q sous l'effet de l'effort P appliqué au levier L (fig. 165).

4.

La position initiale du levier est AB (fig. 167).

Le levier AB se déplace à une vitesse angulaire w .
Après une seconde, il occupe la position A'B'.

Nous savons que la vitesse angulaire w est identique pour tous ses points.

La vitesse linéaire vaut : $V = w \times R$

La vitesse linéaire est le déplacement par unité de temps (par seconde).

La vitesse linéaire de A, ou le déplacement du point A en une seconde est AA'; le rayon = OA.

$$AA' = w \times OA$$

La vitesse linéaire de B, ou le déplacement du point B en une seconde est BB'. Le rayon de la circonférence décrite par B est OB.

Dès lors, $BB' = w \times OB$

Appliquons la condition d'équilibre dynamique $T_p = T_r$

Le travail effectué pendant une seconde par l'effort moteur :

$$T_m \text{ de } P = P \times \text{chemin parcouru}$$

$$T_m = P \times w \times OB$$

Le travail effectué pendant une seconde par l'effort résistant :

$$T_r = Q \times w \times OA$$

$$\text{or, } T_m = T_r$$

$$\text{d'où, } P \times w \times OB = Q \times w \times OA$$

$$\boxed{P \times OB = Q \times OA}$$

$$\boxed{\frac{P}{Q} = \frac{OA}{OB}}$$

Conclusion.

Nous aboutissons au même résultat que par la méthode de l'équilibre statique.

4. Application.

On place l'extrémité A d'un levier AOB sous une charge Q de 2500 N.

Le bras de levier AO de l'effort résistant Q vaut 0,20 m.

La force de levier OB de l'effort moteur P vaut d'abord 0,50 m.

On porte cette valeur à 0,80 m; à 1,00 m; puis à 1,20 m.

Calculez la valeur de la force P qu'il faut exercer à l'extrémité B du levier (voir fig. 165), dans chaque cas.

Données.

Q = 2500 N.
 OA = 0,20 m.
 OB = 0,50 m; 0,80 m; 1,00 m; 1,20 m.

Formules. - Condition d'équilibre statique.

$P \times OB = Q \times OA$
 P = inconnue
 $P = \frac{Q \times OA}{OB}$

Applications numériques.

$P_1 = \frac{2500 \times 0,20}{0,50} = 1000 \text{ N}$
 $P_2 = \frac{2500 \times 0,20}{0,80} = 625 \text{ N}$
 $P_3 = \frac{2500 \times 0,20}{1,00} = 500 \text{ N}$
 $P_4 = \frac{2500 \times 0,20}{1,20} = 416,5 \text{ N}$

7.3.1.2. Levier interrésistant.

1. Définition.

La brouette est une application courante de levier interrésistant (fig. 168).

Le point d'appui O est constitué par l'axe de la roue. La roue pèse sur le sol. L'effort résistant Q est représenté par la charge à soulever. Cette charge est disposée sur le plateau de la brouette.

L'effort moteur P est la force manuelle que nous appliquons en A au bout des brancards de la brouette.

6.

L'ensemble du levier et des poids qui le sollicite est figuré schématiquement par la figure 169.

Remarquons que la force résistance Q est disposée entre l'appui O et la force motrice P . C'est pour cette raison qu'on appelle ce levier: interrésistant.

2. Equilibre statique.

Condition.

$$M_oP + M_oQ = 0$$

$$P \times OA = - Q \times OB$$

En négligeant le signe (-), la seule valeur numérique ou intensité des forces nous intéresse; en effet,

$$P \times OA = Q \times OB$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}$$

Conclusion.

Dans le levier interrésistant, les forces P et Q sont inversement proportionnelles à leur bras de levier.

Réaction de l'appui O : $R = Q - P$

3. Equilibre dynamique.

Nous supposons que le levier AO se déplace (fig.170). C'est le cas de soulèvement de la charge Q par l'effort moteur P (soulèvement de la brouette). La position initiale du levier est AO .

Le levier se déplace à une vitesse angulaire w . Après une seconde, il occupe la position $A'O$.

La vitesse angulaire w est identique pour tous les points.

La vitesse linéaire vaut $V = w \times R$

La vitesse linéaire est le déplacement par unité de temps (par seconde).

La vitesse linéaire de A ou le déplacement du point A en une seconde est AA' ; le rayon est OA .

$$AA' = w \times OA$$

La vitesse linéaire de B ou le déplacement du point B en une seconde est BB' ; le rayon est OB .

Condition d'équilibre dynamique $T_m = T_r$

Le travail effectué pendant une seconde par l'effort moteur :

$$T_m \text{ de } P = P \times \text{chemin parcouru}$$

$$T_m = P \times w \times OA$$

Le travail effectué pendant une seconde par l'effort résistant (on néglige le sens des efforts) :

$$T_r = Q \times w \times OB$$

$$T_m = T_r$$

d'où $P \times w \times OA = Q \times w \times OB$

$$P \times OA = Q \times OB$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}$$

Même conclusion que ci-dessus (page 6, § 2).

4. Applications.

Une brouette est chargée d'une pièce de masse égale à 1000 N . La distance OA vaut $0,40 \text{ m}$. OB vaut $1,60 \text{ m}$. Recherchez l'effort pour lever cette charge. La figure 171 schématise l'ensemble.

Données.

Formules : Condition d'équilibre statique.

$$P \times OB = Q \times OA$$

$$P = \text{inconnue}$$

$$P = \frac{Q \times OA}{OB}$$

Applications numériques :

$$P = \frac{1000 \times 0,40}{1,60}$$

$$P = 250 \text{ N}$$

x
x x

7.3.1.3. Levier interpuissant.

I. Définitions.

La soupape de sûreté à contrepoids (fig. 172) est une application très courante du levier interpuissant. Le point d'appui est l'axe O. L'effort moteur P est la force due à la poussée sur la soupape S. Son point d'application est A.

L'effort résistant Q est le contrepoids Q. Le point B est le point d'application. La disposition schématique de l'ensemble est donnée à la figure 173. Nous observons que l'effort moteur P est placé entre l'appui O et l'effort résistant Q.

2. Equilibre statique.

Certains auteurs appellent l'effort moteur erronément puissance. C'est ce terme qui a donné le nom au levier interpuissant.

Condition $M_oP + M_oQ = 0$

$P \times OA = Q \times OB$ en négligeant les signes des moments.

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}$$

Conclusion.

Dans le levier interpuissant, les forces P x Q sont inversement proportionnelles à leur bras de levier.

3. Equilibre dynamique.

A titre d'application l'élève recherchera la condition d'équilibre du levier interpuissant.

7.3.1.4. Quelques applications pratiques des leviers.

1. Balance ordinaire.

2. Balance de Quintenz.

Balance ordinaire.

La balance ordinaire (fig. 174) se compose d'un levier AOB appelé fléau portant trois couteaux dont celui du milieu O repose sur un appui. Les couteaux A et B supportent les plateaux.

L'équilibre est stable, indifférent ou instable suivant que le centre de gravité G du fléau est au dessous du point d'appui O, coïncide avec lui ou se trouve au-dessus; dans ce cas, on dit que la balance est "folle".

Une balance doit remplir les conditions suivantes:

- 1° Les arêtes des trois couteaux AOB doivent être en ligne droite;
- 2° Les bras de levier AO et OB doivent être égaux;
- 3° Le centre de gravité G du fléau doit être sur la verticale du point de suspension O et au-dessous de ce dernier.

Enfin pour qu'une balance soit sensible, il faut :

- 1° Que le fléau, tout en étant parfaitement rigide, soit suffisamment long et aussi léger que possible.
- 2° Que le centre de gravité G soit au-dessous et aussi près que possible du point de suspension O.

Rappel. Nous avons vu que la balance sert à comparer les masses, la masse d'un corps étant constante, alors que le poids d'un corps est variable suivant le lieu.

Balance de Quintenz.

La balance de Quintenz se compose d'un ensemble de leviers représenté figure 175.

Par construction, on a :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{1}{10}$$

$$\text{et } \frac{OB}{OC} = \frac{O'B'}{O'C'}$$

Cette dernière condition est nécessaire pour que le tablier DE reste constamment horizontal.

Soit Q le poids du corps. Cette force peut être décomposée en deux autres : la force Q_1 appliquée en D et la force Q_2 appliquée en E.

$$\text{On a : } Q = Q_1 + Q_2$$

La force Q_1 peut à son tour être décomposée en deux forces : la force Q_3 appliquée en O' et la force Q_4 appliquée en C' et telles que :

$$Q_3 \times O'B' = Q_4 \times B'C'$$

$$\frac{Q_4}{Q_3} = \frac{O'B'}{B'C'}$$

$$\frac{Q_4}{Q_3 + Q_4} = \frac{O'B'}{B'C + O'B'}$$

$$\text{or } Q_1 = Q_3 + Q_4$$

$$\frac{Q_4}{Q_1} = \frac{O'B'}{O'C} = \frac{OB}{OC} \quad \text{d'où } Q_4 = Q_1 \times \frac{OB}{OC}$$

Appelons P, le poids placé dans le plateau équilibrant le poids Q du corps posé sur le tablier.

Le levier AOB est en équilibre lorsque la somme des moments des forces P, Q₂ et Q₄ par rapport au point O est nulle :

$$MoP + MoQ_2 + MoQ_4 = 0$$

$$(P \times OA) - (Q_2 \times OB) - (Q_4 \times OC) = 0$$

$$P \times OA = Q_2 \times OB + Q_4 \times OC$$

Remplaçons Q₄ par sa valeur en fonction de Q₁ précédemment trouvée :

$$P \times OA = Q_2 \times OB + Q_1 \times \frac{OB}{OC} \times OC$$

$$P \times OA = Q_2 \times OB + Q_1 \times OB = (Q_1 + Q_2) \times OB = Q \times OB$$

$$P = Q \times \frac{OB}{OA}$$

$$P = Q \times \frac{1}{10}$$

Conclusion.

Dans cet exemple, le poids P placé dans le plateau représente donc le dixième du poids du corps Q, la bascule est dite "au dixième".

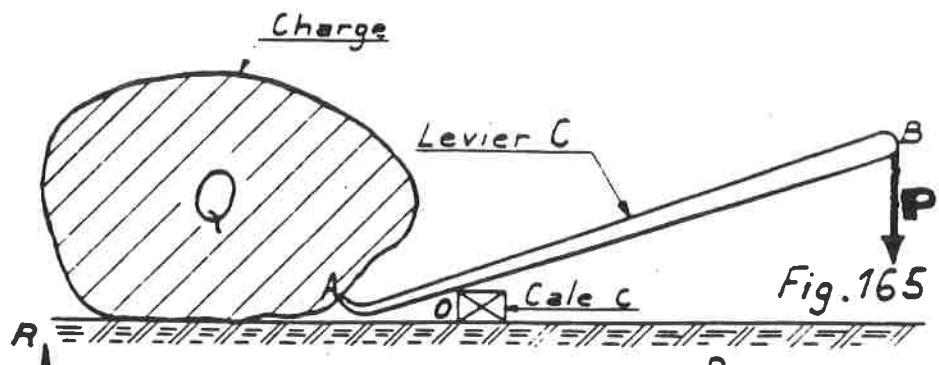


Fig. 165

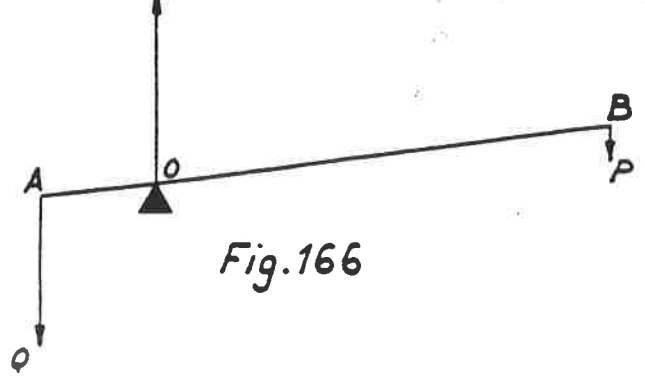


Fig. 166

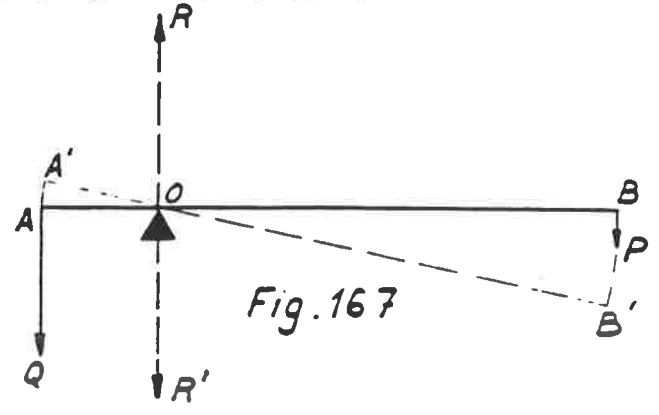


Fig. 167

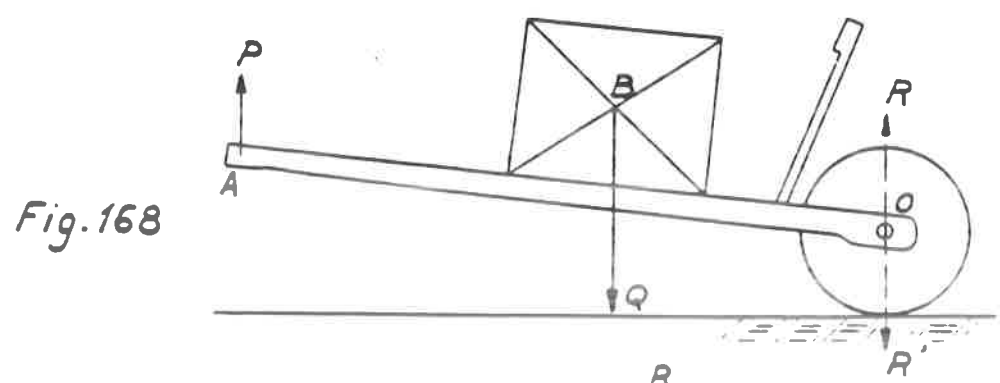


Fig. 168

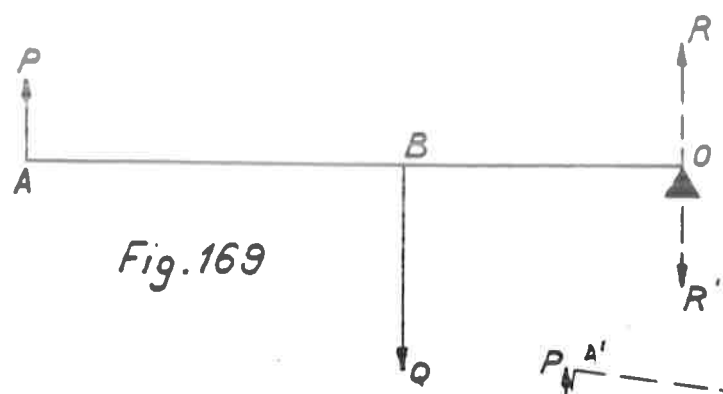


Fig. 169

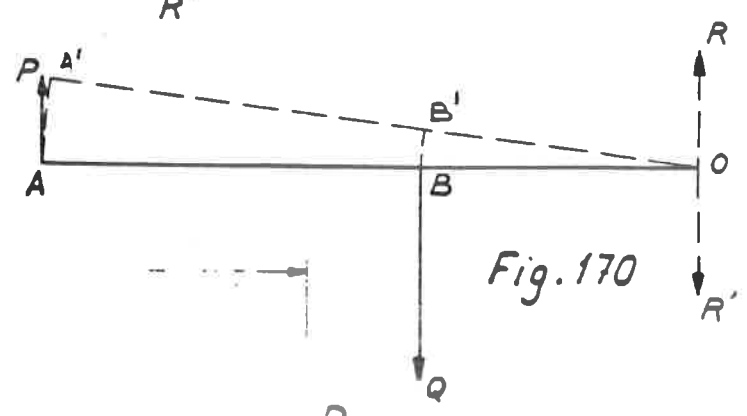


Fig. 170

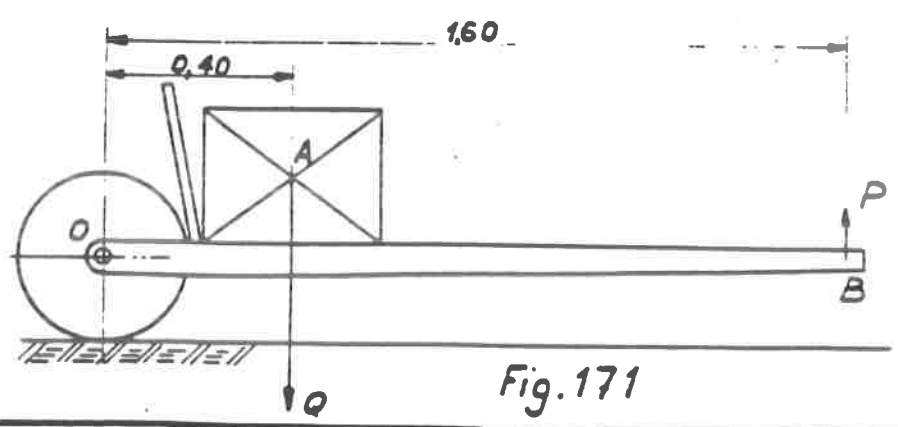


Fig. 171

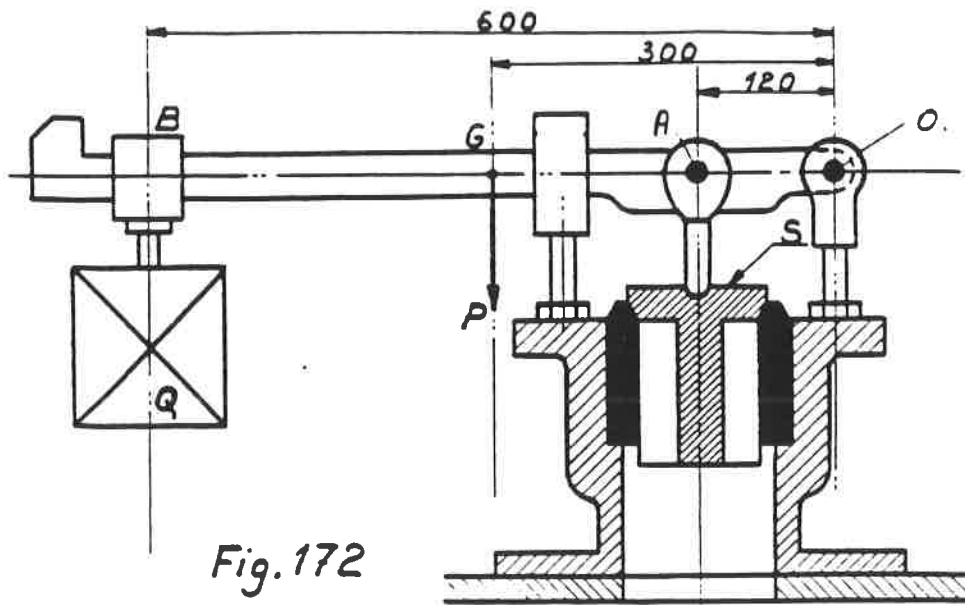


Fig. 172

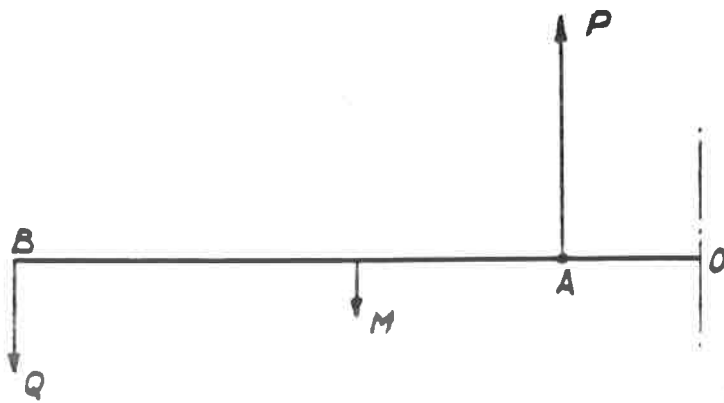


Fig. 173

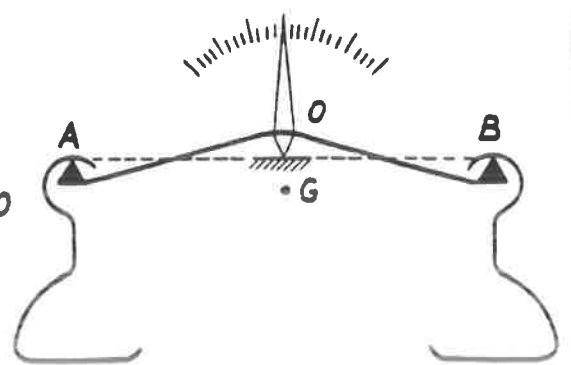


Fig. 174

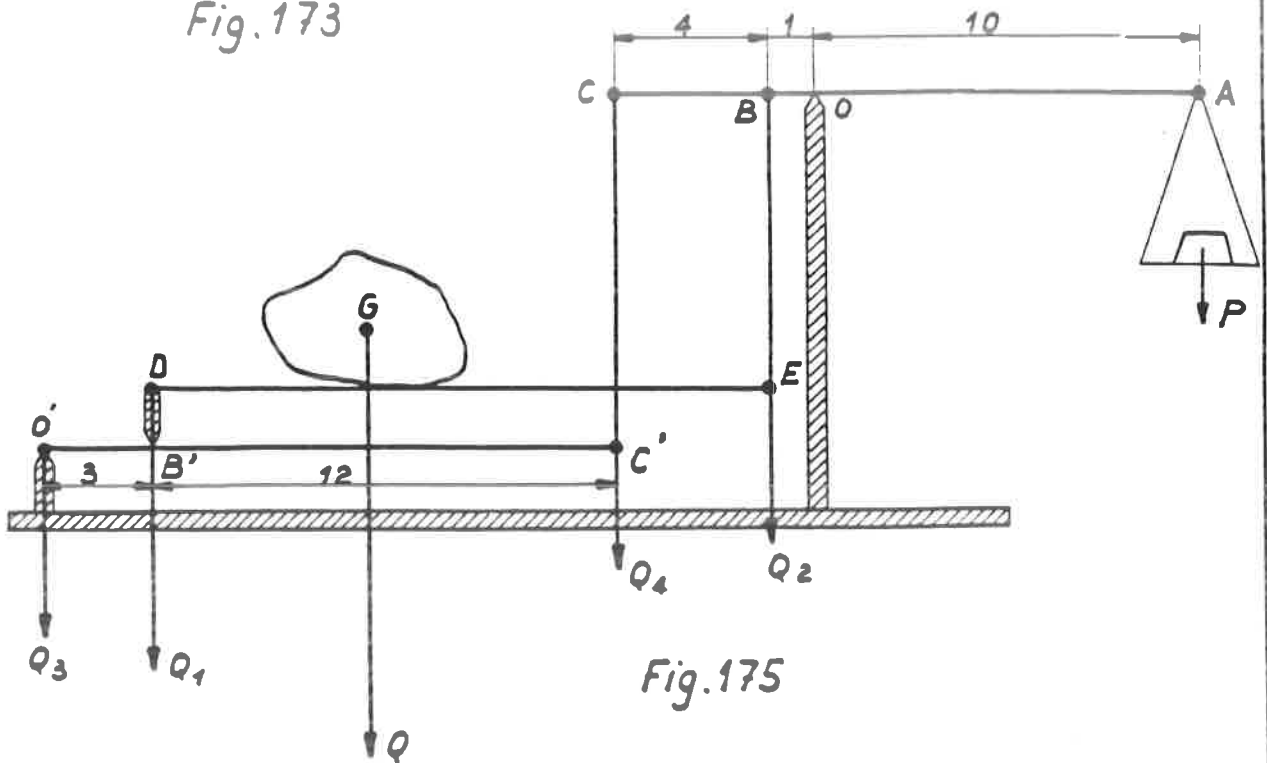


Fig. 175

7.3. Etude des machines simples (suite).

7.3.2. Les poulies, mouffles et balans.

7.3.2.1. Poulie fixe.

1. Définition.

Pour élever les charges, on se sert souvent des poulies. Vous avez tous vu la manoeuvre du maçon qui élevait les briques, le mortier au moyen d'une simple poulie et d'un câble.

Au pignon des fermes, des moulins, on peut voir fréquemment une console qui supporte une vétuste poulie. Cet antique appareil sert encore à élever les sacs de céréales dans les greniers.

La poulie est une roue en fonte, en acier à jante creuse (fig. 176). Un câble en chanvre, métallique, parfois une chaîne s'enroule sur la partie creuse de la jante. Le câble entraîne la poulie. Celle-ci tourne alors autour de son axe O. Remarquons que cet axe est fixe. C'est pour cette raison que la poulie est dite "fixe". A un bout du câble, on suspend la charge à lever, le poids Q. C'est l'effort résistant dirigé de haut en bas. A l'autre bout, on exerce un effort musculaire. C'est l'effort moteur P destiné à élever la charge Q. P est dirigé également de haut en bas.

2. Equilibre statique.

Pour que la poulie soit en équilibre autour du point O (fig. 176), il faut et il suffit que la somme algébrique des moments soit nulle par rapport à ce point.

$$\begin{aligned}M_O P + M_O Q &= 0 \\P \times R - Q \times R &= 0 \\P \times R &= Q \times R \\P &= Q\end{aligned}$$

3. Equilibre dynamique.

Principe de l'équilibre dynamique: $T_Q = T_P$ (en une seconde).

Supposons qu'en une seconde, la poulie effectue un tour sur elle-même.

$$\begin{aligned} \text{Travail de } Q &= Q \times \text{chemin parcouru} \\ &= Q \times 2 \pi \times r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Travail de } P &= P \times \text{chemin parcouru} \\ &= P \times 2 \pi \times r \end{aligned}$$

$$T_Q = T_P$$

$$Q \times 2 \pi \times r = P \times 2 \pi \times r$$

$$Q = P$$

Conclusion. Dans les poulies fixes et d'après les conditions théoriques d'équilibre, l'effort P à exercer est égal à la charge Q à soulever.

Remarque. Cette machine ne réduit donc pas l'effort moteur. Il permet simplement d'exercer un effort de haut en bas pour élever une charge. Cette charge correspond à un effort de même sens.

$$\text{Au repos: } P = Q$$

Dans le cas de la poulie en mouvement, P n'est pas pratiquement égal à Q , mais doit lui être supérieur. En effet, des frottements existent entre la poulie et son axe et du câble sur la jante.

Rendement. Le rendement k d'une machine est le rapport qui existe entre le travail de l'effort résistant et le travail de l'effort moteur.

La valeur du rendement de la poulie fixe vaut:

$$k = \frac{Q \times 2 \pi r}{P \times 2 \pi r}$$

ou

$$k = \frac{Q}{P}$$

Poulies fixes avec câble en chanvre: rendement $k =$

85 % environ

Poulies fixes avec câble métallique: rendement $k =$

95 % environ

Poulies fixes avec chaînes: rendement $k = 95$ % environ

Exemple: Si $Q = 500 \text{ N}$ il faut pour élever cette charge, un effort $P = \frac{Q}{k} = \frac{500}{0,95} = 526 \text{ N}$ La valeur des forces de frottement est:

$$526 - 500 = 26 \text{ N}$$

Conclusion. Dans une poulie fixe en mouvement, l'effort moteur P est égal à l'effort résistant Q augmenté des forces de frottement f .

7.3.2.2. Poulie mobile.

1. Définition.

Une poulie mobile p repose sur un câble (fig. 177).
A son axe est fixé une chaîne munie d'un crochet. C'est à ce crochet que l'on suspend la charge Q à lever.

Une extrémité du câble est fixée à un point fixe A (charpente, solive, console). A l'autre extrémité du câble, on applique l'effort moteur P .

2. Equilibre statique.

Le système est en équilibre sous l'action de trois forces parallèles T , P et Q . Appliquons la condition d'équilibre statique:

$$M_O T + M_O P + M_O Q = 0$$

$$T \times r - P \times r + Q \times 0 = 0$$

$$T \times r = P \times r$$

$$T = P.$$

1ère Conclusion. Cette égalité $T = P$ prouve que les efforts dans chacun des cordons sont identiques.

Comme les trois forces sont parallèles:

$$Q = P + T$$

Comme

$$P = T$$

$$Q = P + P = 2P$$

d'où :

$$P = \frac{Q}{2}$$

2e conclusion. L'effort moteur P vaut la moitié de l'effort résistant Q .

3. Equilibre dynamique.

Lorsque la charge Q (effort résistant) monte de 1,00 m. (fig. 178), chacun des bras doit aussi monter de 1 m.

Comme le point A est fixe, le brin de l'effort moteur P doit donc monter de 2 m. Appliquons la condition de l'équilibre dynamique:

$$T_q = T_p$$

$$\begin{aligned} \text{Travail de } Q &= Q \times \text{chemin parcouru} \\ &= Q \times a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Travail de } P &= P \times \text{chemin parcouru} \\ &= P \times 2a \\ Q \times a &= P \times 2a \quad (1) \end{aligned}$$

1ère conclusion.

Le chemin parcouru par la force motrice vaut le double de celui parcouru par la force résistante.

Ce que l'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru.

(1) devient après simplification $Q = 2P$.

$$P = \frac{Q}{2}$$

2ème conclusion. Identique à celle résultant de la méthode de l'équilibre statique.

Remarque. Dans le cas du système en mouvement, P doit être pratiquement supérieur à $\frac{Q}{2}$. Des frottements sont notés entre la poulie et son axe et du câble sur la jante.

$$P = \frac{Q}{2} + f$$

Rendement. Le rendement de cette machine =

$$\frac{\text{Travail effort résistant}}{\text{Travail effort moteur}}$$

$$k = \frac{Q \times a}{P \times 2a}$$

d'où

$$k = \frac{Q}{2P}$$

7.3.2.3. Combinaison de poulies.

Les combinaisons de poulies sont multiples.

1. Combinaison d'une poulie fixe et d'une poulie mobile.

Cette combinaison est décrite par la figure 179. Nous avons l'égalité $P = \frac{Q}{2}$.

2. Combinaison d'une poulie fixe et de plusieurs poulies mobiles.

Voir figure 180 $P = \frac{Q}{8}$

3. Combinaison de poulies fixes et mobiles.

La signalisation mécanique de la SNCF offre des exemples variés de l'application des poulies.

7.3.2.4. Moufles et palans simples.

1. Définition.

Une moufle est un ensemble de plusieurs poulies montées dans une même chape (fig. 181).

Les poulies sont généralement placées sur un même axe.

La combinaison de deux moufles, l'un fixe (suspendu à un point fixe), l'autre mobile est appelé palan à corde (fig. 182).

Les deux moufles sont réunis par un même câble. Une des extrémités de la corde est fixée sur le moufle fixe. La force motrice s'exerce à l'autre extrémité ou brin libre.

2. Equilibre statique.

Nous avons démontré précédemment que dans une poulie mobile, l'effort moteur est égal à la moitié de l'effort résistant.

$$P = \frac{Q}{2}$$

Par conséquent, si le palan se compose de n poulies mobiles, nous aurons:

$$P = \frac{Q}{2n}$$

En général, on adapte dans les palans un nombre égal de poulies fixes et de poulies mobiles.

Dès lors, si nous représentons par $N = 2n$ la somme des poulies du palan:

fixes et mobiles

$$P = \frac{Q}{N}$$

Exemple: Que vaut l'effort P dans le palan décrit dans la figure 182 ? Le nombre de brins de câbles du palan est de 8:

$$P = \frac{Q}{8}$$

Conclusion: Dans un palan à corde, l'effort moteur est égal au quotient de l'effort résistant par le nombre total de poulies fixes et mobiles.

3. Equilibre dynamique.

Soit le palan à quatre poulies mobiles de la fig. 182. Nous supposons que la charge ou effort résistant Q s'élève à 1 m. Nous avons vu précédemment que pour une seule poulie mobile, il y avait deux cordons et nous avons prouvé que le chemin parcouru par l'effort moteur valait deux fois celui parcouru par l'effort résistant soit: $2 \times 1 \text{ m.} = 2 \text{ m.}$

Il découle que pour 4 poulies mobiles (8 brins) l'effort moteur parcourra un espace $2 \times 4 = 8$ fois plus grand que celui parcouru par Q., c.à.d.

$$\begin{aligned} 8 \times 1,00 &= 8,00 \text{ m.} \\ T_q &= T_p \\ Q \times 1,00 &= P \times 8,00 \\ P &= \frac{Q}{8} \end{aligned}$$

4. Rendement. Les valeurs moyennes pratiques du rendement des palans à cordes sont les suivantes:

<u>Nombre de poulies</u>	<u>Rendement</u>
H = 4	k = 0,80
H = 6	k = 0,71
H = 8	k = 0,65

7.3.2.5. Palan différentiel.

1. Définition.

Le palan différentiel (fig. 184) se compose d'une moufle à deux poulies A et B de diamètres différents et d'une poulie mobile. Sur ces poulies s'enroulent une chaîne sans fin.

Le glissement possible de la chaîne dans les gorges des poulies est empêché par la présence d'empreintes. Ces empreintes ont la forme des maillons de la chaîne.

La dénomination de "palan différentiel" provient de la différence des diamètres des poulies A et B.

La charge ou effort résistant Q se décompose en deux forces $\frac{Q}{2}$ suivant les brins 3 et 4.

2. Equilibre statique.

Pour que l'ensemble des deux poulies A et B soit en équilibre autour d'un point O, il faut que la somme algébrique des moments de toutes les forces par rapport au point de rotation soit égale à 0.

$$\Sigma M_O \text{ forces sollicitantes} = 0$$

$$P \times R + \frac{Q}{2} \times r = \frac{Q}{2} \times R$$

$$P \times R = \frac{Q}{2} \times R - \frac{Q}{2} \times r$$

$$P \times R = \frac{Q}{2} (R - r)$$

$$P = \frac{Q (R - r)}{2 R}$$

Conclusion. Cette relation indique que pour une force résistante donnée Q, l'effort moteur P est d'autant plus faible que la différence R-r est plus petite. Les constructeurs adoptent pour les roues A et B, des nombres d'empreintes de maillons dans les forces qui ne diffèrent que d'une unité.

3. Equilibre dynamique.

T effort moteur P = T effort résistant Q

Effort moteur P x son déplacement = Effort résistant Q x son déplacement.

Déplacement de P = $2 \pi \times R$ (1 tour)
 Déplacement de Q

Lorsque la chaîne s'enroule d'un tour sur la grande poulie, elle se déroule aussi d'un tour sur la petite poulie. La longueur réelle enroulée vaut la différence entre la longueur d'un tour de la poulie A et la longueur d'un tour de la poulie B.

$$\text{soit: } 2 \pi R - 2 \pi r = 2 \pi (R - r)$$

A cette longueur enroulée correspond un déplacement vertical du brin. La poulie C est mobile. La charge Q suspendue à sa chape ne s'élèvera que de la moitié de cette valeur, soit:

$$\frac{2 \pi (R - r)}{2} \text{ ou } \boxed{\pi (R - r)}$$

$$\begin{aligned} \text{Travail de P} &= P \times 2 \pi R \\ \text{Travail de Q} &= Q \times \pi (R - r) \end{aligned}$$

Appliquons la condition: $T_p = T_q$
 $P \times 2 \pi R = Q \times \pi (R - r)$

$$P = \frac{Q \pi (R - r)}{2 \pi R}$$

et $\boxed{P = \frac{Q (R - r)}{2R}}$

Conclusion: Identique à celle découlant du principe de l'équilibre statique.

4. Rendement.

Le rendement des palans différentiels est très faible. En effet, on note des frottements importants des chaînes sur les poulies. Le rendement $\frac{TP}{TQ}$ vaut de 0,35 à 0,45.

Ces appareils sont cependant très employés industriellement parce qu'ils présentent de gros avantages. Ils sont robustes, maniables et de prix de revient accessibles.

7.3.2.6. Transformation du palan différentiel.

Les figures 185 et 186 montrent deux transformations du palan différentiel. Ces perfectionnements ont pour but la réduction de l'effort moteur.

1° Modification.

Le dispositif de la figure 185 montre la première modification apportée au palan. Ce palan possède une poulie supplémentaire D calée sur le même axe que les poulies A et B.

Le diamètre de la poulie D vaut généralement de 2 à 3 fois celui de la poulie A.

Soient P et P', les efforts moteurs à exercer selon que l'effort moteur s'applique sur les poulies A (rayon R) ou D (rayon R').

Nous avons la relation $\frac{P'}{P} = \frac{R}{R'}$

$$\text{et } P \times R = P' \times R'$$

Cette relation montre que P' est d'autant plus petit que R' est plus grand.

2° Modification.

La figure 186 montre l'introduction d'un train d'engrenages dans le palan différentiel.

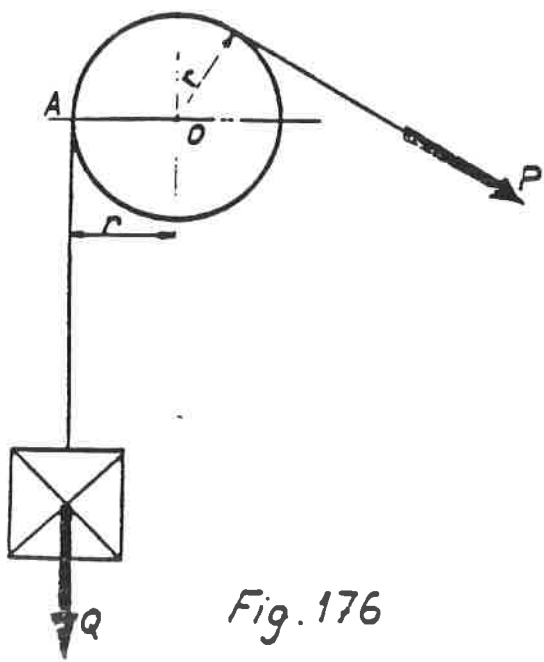


Fig. 176

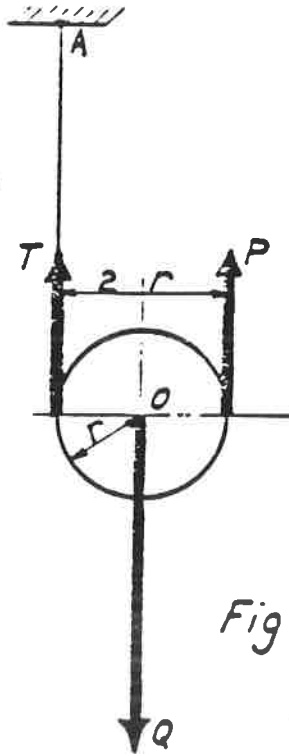


Fig. 177

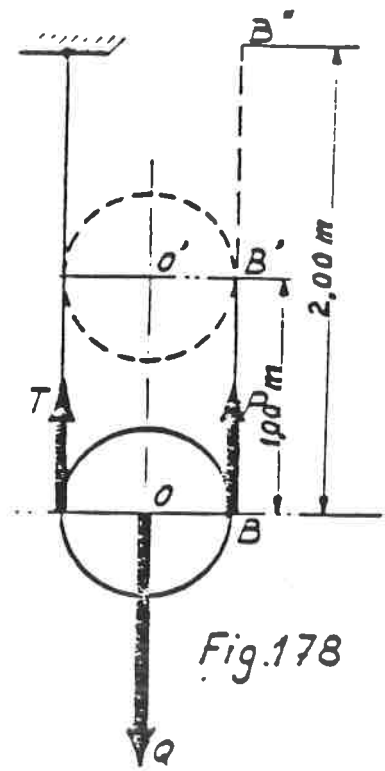


Fig. 178

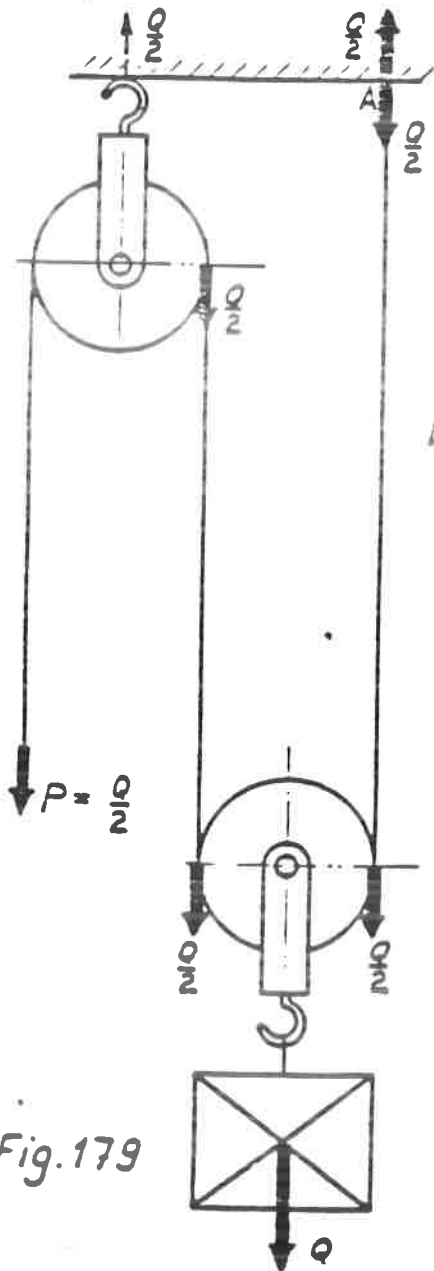


Fig. 179

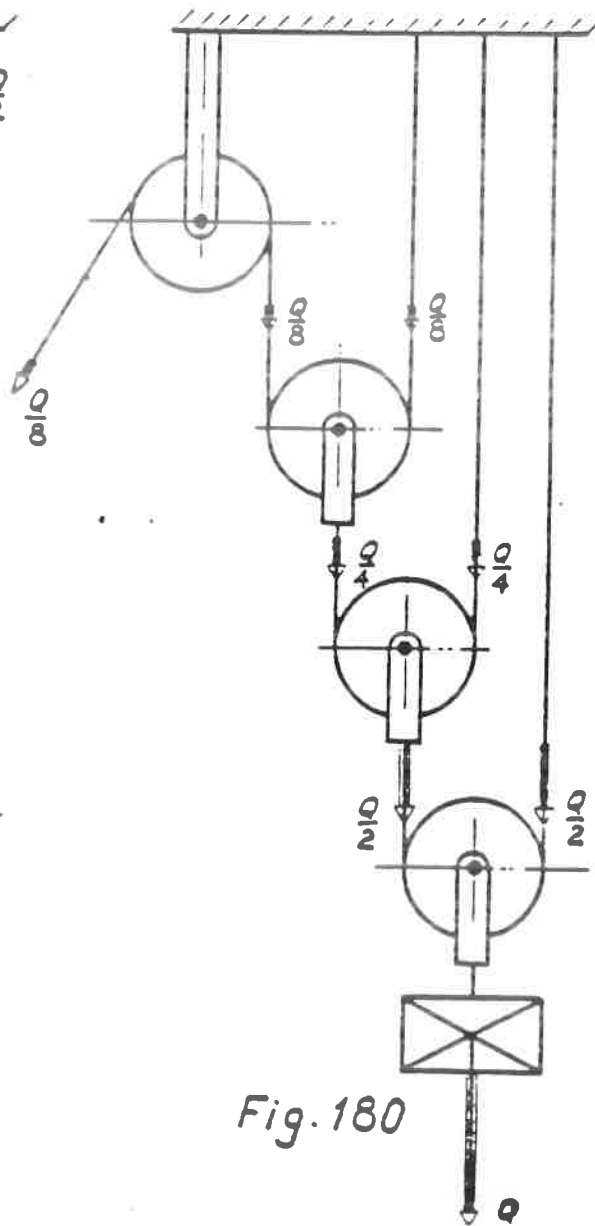


Fig. 180

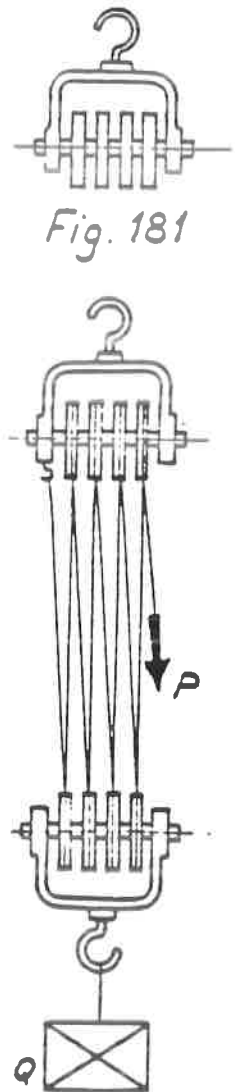


Fig. 182

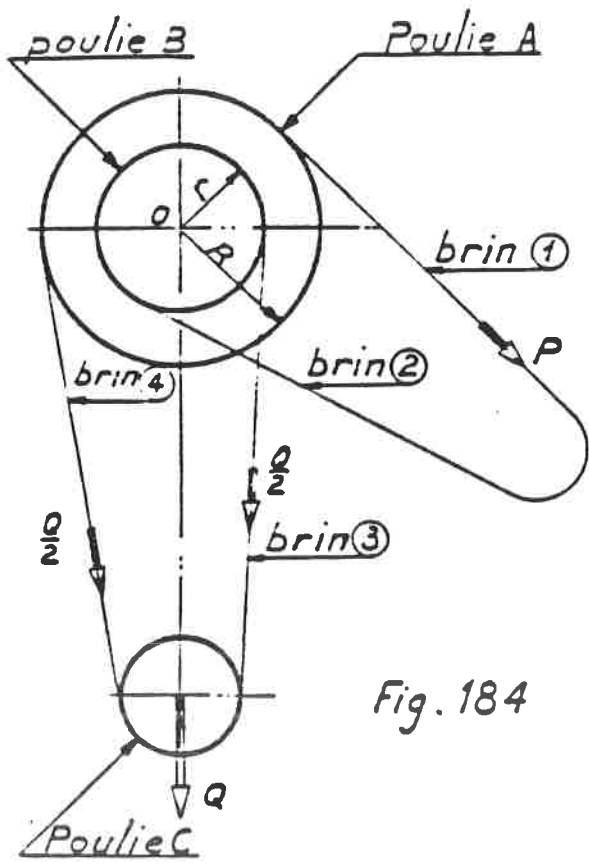


Fig. 184

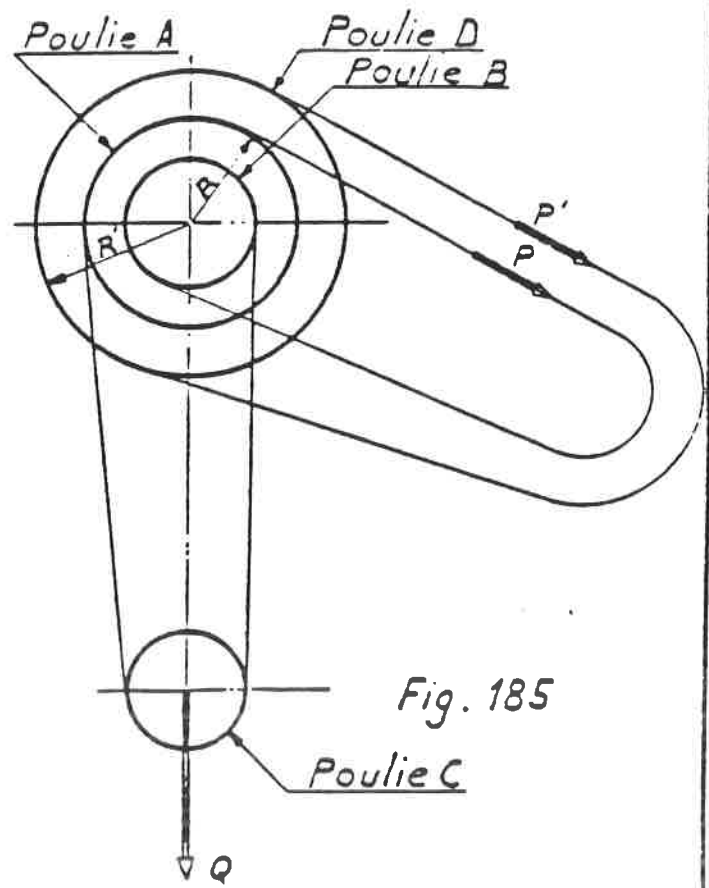


Fig. 185

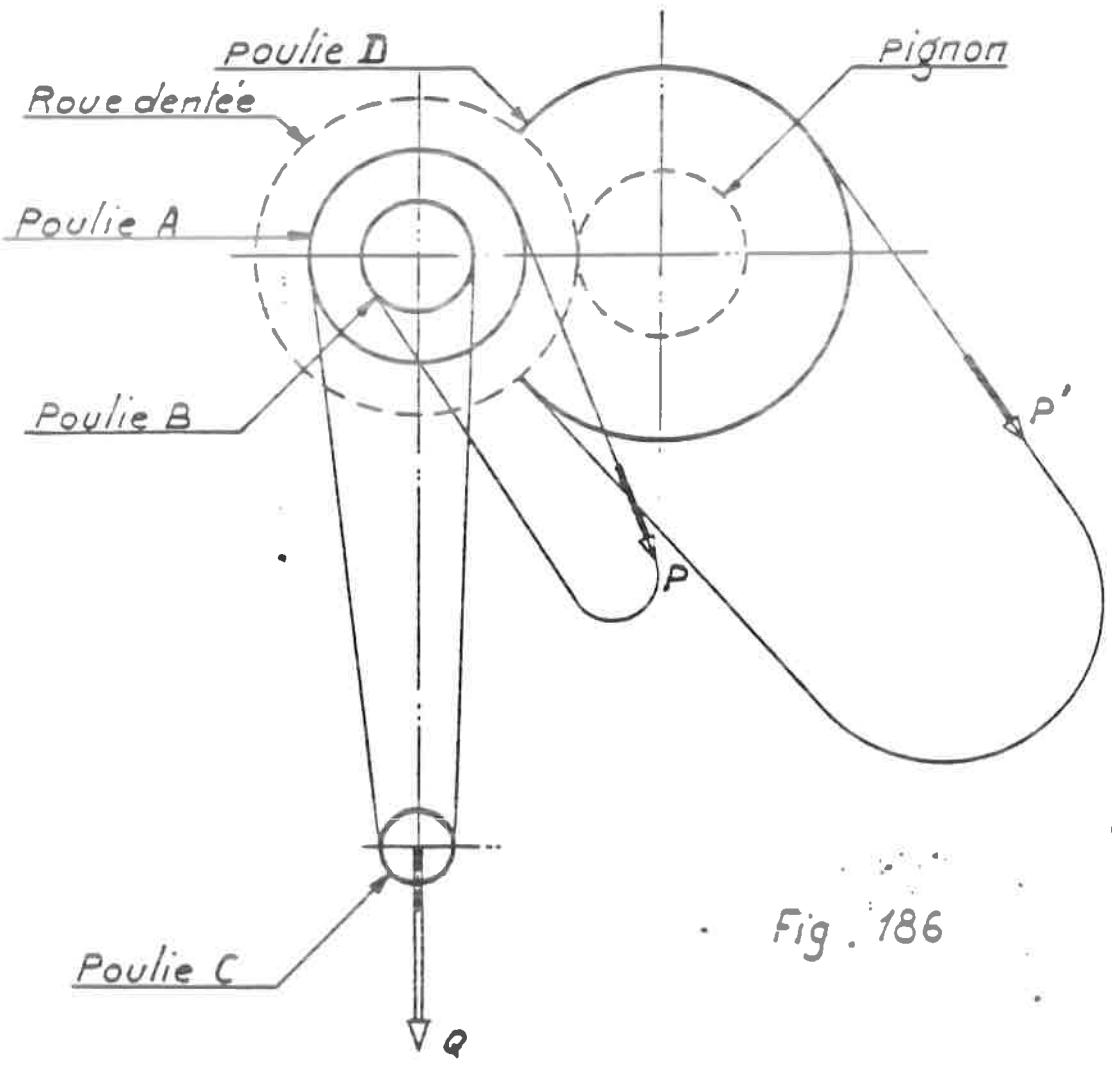


Fig. 186

7.3. - ETUDE DES MACHINES SIMPLES (suite).

7.3.3. - Les Treuils.

7.3.3.1. - 1. Treuil simple.

1. Définition.

Le treuil simple se compose d'un tambour porté par deux tourillons C (fig. 187). La charge à soulever se fixe à l'extrémité d'un câble qui s'enroule sur le tambour. La manoeuvre est réalisée au moyen d'une ou de deux manivelles M.

Le treuil simple est utilisé pour la manoeuvre de faibles charges. Il équipe parfois des appareils tels que : grues, monte-charges, ponts-roulant.

2. Equilibre statique.

P - Effort moteur que nous supposons agir sur une manivelle de rayon R.

r - Rayon du tambour d'enroulement du câble.

F_1, F_2 - Réactions aux appuis.

Pour que le tambour du treuil soit en équilibre autour de son axe, il faut que la somme algébrique des moments de forces du système par rapport à cet axe soit égale à 0.

$$\begin{aligned} \sum \text{moments} &= 0 \\ M_{xy} P &= P \times R \\ M_{xy} Q &= Q \times r \\ M_{xy} F_1 &= M_{xy} F_2 = 0 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} P \times R - Q \times r &= 0 \\ P \times R &= Q \times r \\ \frac{P}{Q} &= \frac{r}{R} \end{aligned}$$

Conclusion.

Si l'on fait abstraction des résistances passives dans un treuil simple, les efforts moteur et résistant sont en raison inverse de leur bras de levier.

3. Equilibre dynamique.

Principe : $T_p = T_q$

Pour un tour de manivelle, les travaux T_p et T_q valent respectivement :

$$T_p = P \times 2 \pi \times R$$

$$T_q = Q \times 2 \pi \times r$$

$$P \times 2 \pi \times R = Q \times 2 \pi \times r$$

$$P \times R = Q \times r$$

$$P = Q \times \frac{r}{R}$$

Conclusion. - Identique à la précédente.

4. Rendement.

Le rendement ou $\frac{\text{Travail de Q (réel)}}{\text{Travail de P (réel)}}$ atteint en moyenne une valeur $k = 0,70$.

5. Remarque.

De la relation $P = Q \times \frac{r}{R}$, on peut tirer :

$$Q = P \times \frac{R}{r}$$

Pour un effort P donné, on pourra augmenter d'autant plus Q que le rayon R de la manivelle sera plus grand et que le rayon r du tambour sera plus petit.

Il faut cependant se limiter :

- a) Des raisons de facilité de manoeuvre limite le rayon R à environ 350 mm.
- b) La flexion du câble à l'enroulement sur le tambour ne permet pas d'adopter des rayons de tambour inférieurs à 250 fois le diamètre du fil composant le câble.

Pratiquement, avec un treuil à simple manivelle, la charge soulevée Q ne dépasse guère deux fois l'effort moteur P exercé à la manivelle.

7.3.3.2. - 2. Treuil différentiel.

1. Définition.

Le treuil différentiel se compose de deux tambours de diamètres différents, calés sur un même axe (fig. 188).

Pendant la levée, le câble s'enroule dans un sens sur le grand tambour et se déroule en sens contraire sur l'autre. La charge est attachée à la poulie mobile G.

2. Equilibre statique.

Pour la simplicité de la démonstration, on considère comme parallèles les brins de câble qui soutiennent la poulie mobile.

Les efforts qui sollicitent le tambour sont :

- a) Les efforts moteurs $\frac{P}{2}$ à la 1ère manivelle + $\frac{P}{2}$ à la 2ème manivelle. Cette sollicitation correspond à un effort moteur P sur une seule manivelle de même rayon; soit R, ce rayon.
- b) Un effort $\frac{Q}{2}$ qui agit tangentiellement au petit tambour de rayon r_1 .
- c) Un effort $\frac{Q}{2}$ qui agit tangentiellement au grand tambour de rayon r_2 .
- d) Les réactions d'appui au droit des tourillons :

$$R_1 \text{ et } R_2$$

Appliquons la condition d'équilibre statique.

Somme algébrique des moments des forces par rapport à axe xy = 0.

$$\sum M_{xy} = 0.$$

$$P \times R + \frac{Q \times r_1}{2} - \frac{Q \times r_2}{2} = 0$$

$$P \times R = \frac{Q \times r_2}{2} - \frac{Q \times r_1}{2} = \frac{Q}{2} \times (r_2 - r_1)$$

$$P = \frac{Q}{2} \times \frac{r_2 - r_1}{R}$$

$$P = \frac{Q (r_2 - r_1)}{2 R}$$

Conclusions.

- a) Comparez cette relation avec celle de l'effort moteur dans l'étude du palan différentiel (§ 7.3.2.5.)

On préfère généralement ce dernier appareil parce qu'à rapport d'effort égal, il est moins encombrant et plus facile à déplacer.

b) Pour réduire l'effort moteur P, il y a intérêt :

1. à augmenter le rayon R de la manivelle;
2. à réduire le plus possible la valeur $r_2 - r_1$

3. Equilibre dynamique.

Condition : $T_P = T_Q$

Pour un tour de manivelle le chemin parcouru par P vaut

$$2 \pi \times R$$

Pour ce tour; le chemin parcouru par Q vaudra :

$$\frac{2 \pi r_2 - 2 \pi r_1}{2} = \pi (r_2 - r_1)$$

$$P \times 2 \pi \times R = Q (r_2 - r_1) \times \pi$$

$$2 P \times R = Q (r_2 - r_1)$$

$$P = \frac{Q (r_2 - r_1)}{2 R}$$

Conclusion. Cette relation est identique à la précédente.

4. Rendement.

Le rendement de cette machine $\left(\frac{TQ}{TP}\right)$ atteint en général une valeur $k = 0,65$.

7.3.3.3. - Treuil à engrenage simple.

1. Définition.

Le tabbour est solidaire d'une roue dentée engrenant avec une autre roue de diamètre plus petit (pignon) et calée sur l'axe des manivelles d'entraînement. (fig. 189).

2. Equilibre statique.

a) Equilibre de l'arbre XX'.

L'effort moteur P exercé au bout de la manivelle crée une force tangentielle T.

$$\sum M_{XX'} = 0$$

$$\begin{aligned} P \times R &= T \times r_1 \\ T &= \frac{P \times R}{r_1} \quad (1) \end{aligned}$$

b) Equilibre du tambour (autour de l'axe YY').

La charge Q doit être équilibrée par T.

$$Q \times r = T \times r_2$$

$$Q = \frac{T \times r_2}{r} \quad (2)$$

En remplaçant
nous obtenons :

dans (2), l'effort T par sa valeur,

$$Q = \frac{P \times R \times r_2}{r_1 \times r}$$

$$Q = \frac{P \times R}{r} \times \frac{r_2}{r_1}$$

N.B. - En cinématique, nous avons vu que le rapport des rayons $\frac{r_2}{r_1}$ des roues dentées peut être remplacé par

le rapport des nombres de dents $\frac{z_2}{z_1}$ (z_1 = nombre de dents du petit pignon; z_2 = nombre de dents du grand pignon).

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\text{d'où : } Q = \frac{P \times R}{r} \times \frac{z_2}{z_1}$$

$$\text{Et , } P = Q \times \frac{r}{R} \times \frac{z_1}{z_2}$$

$$\text{et encore , } \frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{z_1}{z_2}$$

3. Equilibre dynamique.

Pour un tour de manivelle par exemple :

Travail de l'effort moteur = Travail de l'effort résistant.

a) Travail de l'effort moteur P pour un tour

= effort moteur P x déplacement.

Déplacement de P pour 1 tour = $2 \pi \times R$

Travail de P pour 1 tour = $P \times 2 \pi \times R$

b) Travail de l'effort résistant Q pour 1 tour

= effort résistant Q x son déplacement.

Déplacement de Q pour 1 tour = le tambour parcourera $\frac{z_1}{z_2}$

$$= 2 \pi \times r \times \frac{z_1}{z_2}$$

Travail de Q pour 1 tour = $Q \times 2 \pi \times r \times \frac{z_1}{z_2}$

$$T_p = T_q$$

$$P \times 2 \pi \times R = Q \times 2 \pi \times r \times \frac{z_1}{z_2}$$

$$P \times R = Q \times r \times \frac{z_1}{z_2}$$

$$P = Q \times \frac{r}{R} \times \frac{z_1}{z_2}$$

et $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{z_1}{z_2}$

Conclusion. Ces résultats sont identiques à ceux obtenus par l'application de l'équilibre statique.

4. Rendement.

Le rendement moyen $\frac{T_q}{T_p}$ des treuils à engrenage simple atteint en général la valeur $k = 0,60$.

7.3.3.4. - Treuil à double engrenage.

1. Définition.

La figure 19C montre schématiquement l'ensemble du treuil à engrenage double.

2. Equilibre statique.

Condition d'équilibre de l'arbre I.

$$P \times R = T \times r_1$$

$$T = \frac{P \times R}{r_1} \quad (1)$$

Condition d'équilibre de l'arbre II.

$$T \times r_2 = T' \times r_3$$

En remplaçant T par sa valeur (1),

on a : $\frac{P \times R}{r_1} \times r_2 = T' \times r_3$

$$T' = \frac{P \times R}{r_1} \times \frac{r_2}{r_3} \quad (2)$$

Condition d'équilibre de l'arbre III.

$$T' \times r_4 = Q \times r$$

En remplaçant T' par sa valeur (2)

$$\frac{P \times R}{r_1} \times \frac{r_2}{r_3} \times r_4 = Q \times r$$

$$Q = P \times \frac{R \times r_2 \times r_4}{r \times r_1 \times r_3}$$

Les rapports des rayons $\frac{r_2}{r_1}$ et $\frac{r_4}{r_3}$ peuvent être remplacés par les rapports des nombres de dents soit $\frac{z_2}{z_1}$ et $\frac{z_4}{z_3}$
la formule transformée devient :

$$Q = P \times \frac{R \times z_2 \times z_4}{r \times z_1 \times z_3}$$

et

$$P = Q \times \frac{r \times z_1 \times z_3}{R \times z_2 \times z_4}$$

3. Equilibre dynamique.

La méthode de démonstration est la même que celle du paragraphe 7.3.3.3.3.

4. Rendement. $\frac{T_Q}{T_P}$

Le rendement du treuil à engrenage double atteint en général une valeur de $k = 0,55$.

7.3.3.5.- Le Cric simple à crémaillère.

1. Définition.

Le cric est un appareil destiné à soulever des charges très fortes à de faibles hauteurs.

Il se compose (fig. 191) d'une manivelle solidaire d'un petit pignon denté. Ce pignon engrène une crémaillère dont la partie supérieure est terminée par une tête supportant la charge à soulever.

Un cliquet s'engage dans une roue à rochets et s'oppose à la descente de la charge.

2. Equilibre statique.

Soit X Y l'axe des moments.

La condition d'équilibre statique : $P \times R = Q \times r$

$$P = \frac{Q \times r}{R}$$

Conclusion.

L'effort moteur P vaut l'effort résistant (charge) Q multiplié par le rapport des rayons du pignon d'entraînement et de la manivelle.

3. Equilibre dynamique.

$$T_P = T_Q \text{ (pour 1 tour de manivelle)}$$

Chemin parcouru par P pour 1 tour de manivelle = $2 \pi R$

Chemin parcouru par Q pour 1 tour de manivelle = $2 \pi r$

La condition d'équilibre dynamique : $P \times 2 \pi R = Q \times 2 \pi r$

$$P = \frac{Q \times r}{R}$$

Conclusion : La même que celle du paragraphe 2 ci-dessus.

4. Rendement.

Le rendement d'un cric simple à crémaillère est d'environ : $k = 0,80$.

7.3.3.6.- Cric à crémaillère à engrenage. (fig 122)

1. Définition.

Ce cric est identique au précédent, mais un train d'engrenages accroît la démultiplication.

2. Equilibre statique.

Condition d'équilibre de l'arbre I.

$$P \times R = T \times r_1$$

$$T = P \times \frac{R}{r_1} \quad (1)$$

Condition d'équilibre de l'arbre II.

$$T \times r_2 = Q \times r$$

En remplaçant T par sa valeur (1) :

$$\text{on a : } P \times \frac{R}{r_1} \times r_2 = Q \times r$$

$$P = Q \times \frac{r \times r_1}{R \times r_2}$$

On peut remplacer le rapport des rayons $\frac{r_1}{r_2}$ par celui des nombres de dents des mêmes roues $\frac{Z_1}{Z_2}$ (2) devient dès lors :

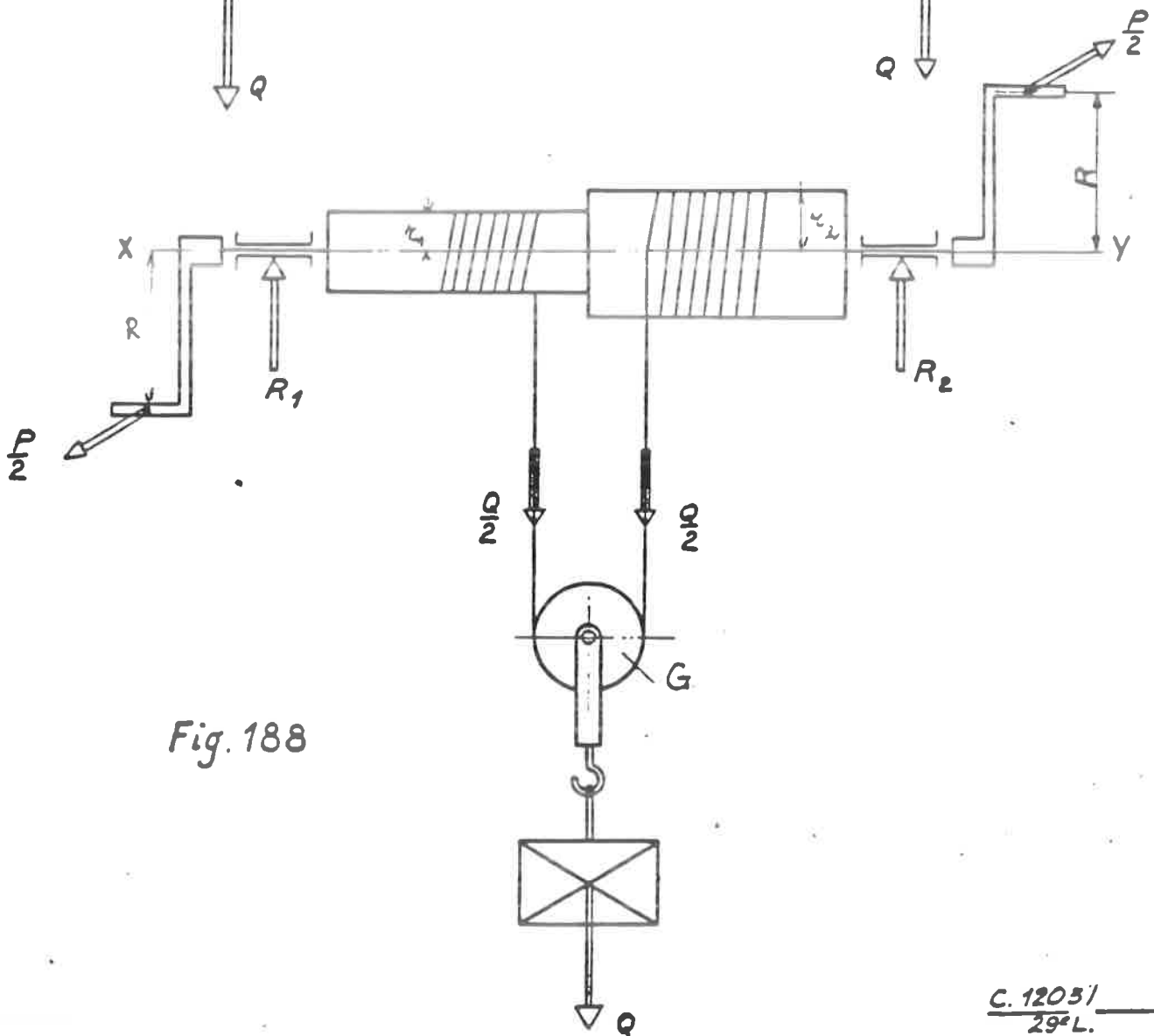
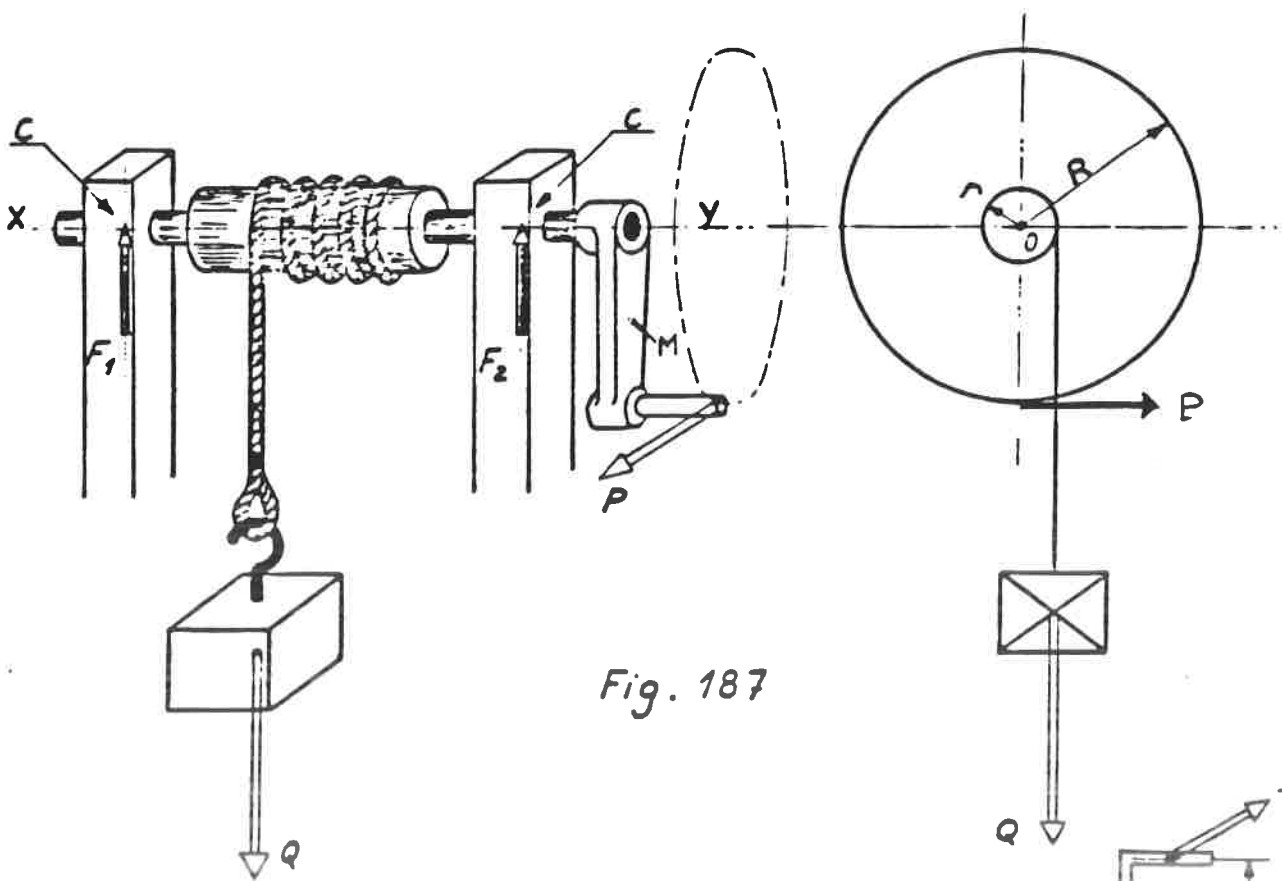
$$P = Q \times \frac{r \times Z_1}{R \times Z_2}$$

3. Equilibre dynamique.

En adoptant un raisonnement analogue à celui développé au paragraphe 7.6.5.3, on trouvait la même relation que ci-dessus.

4. Rendement.

Il atteint pour cet appareil une valeur k moyenne de 0,70.



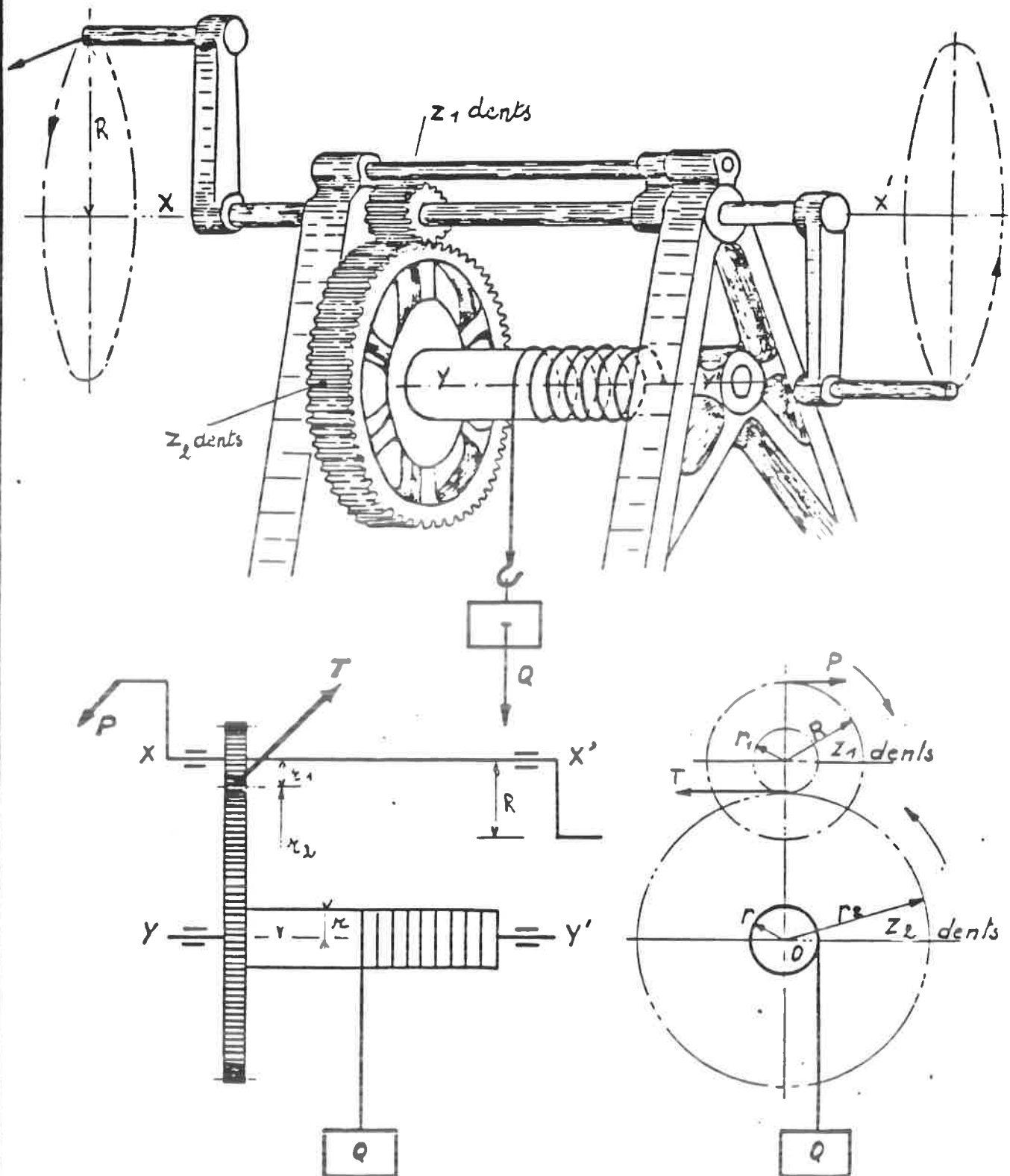


Fig. 189

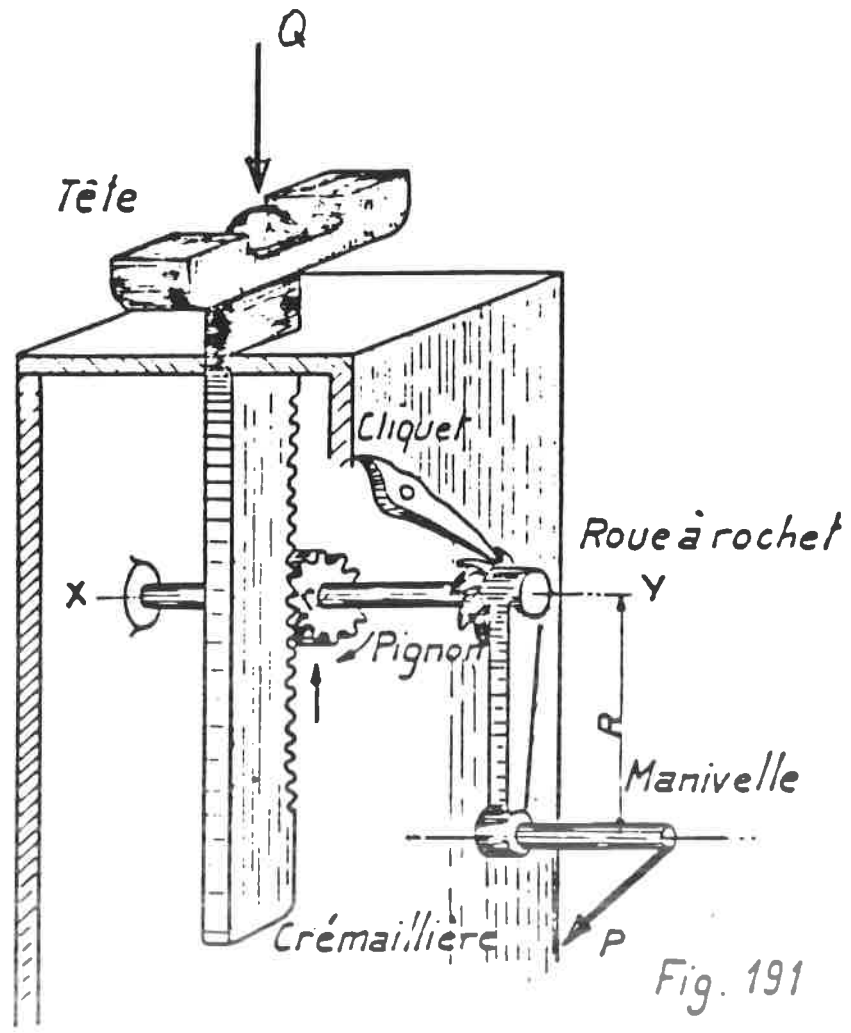


Fig. 191

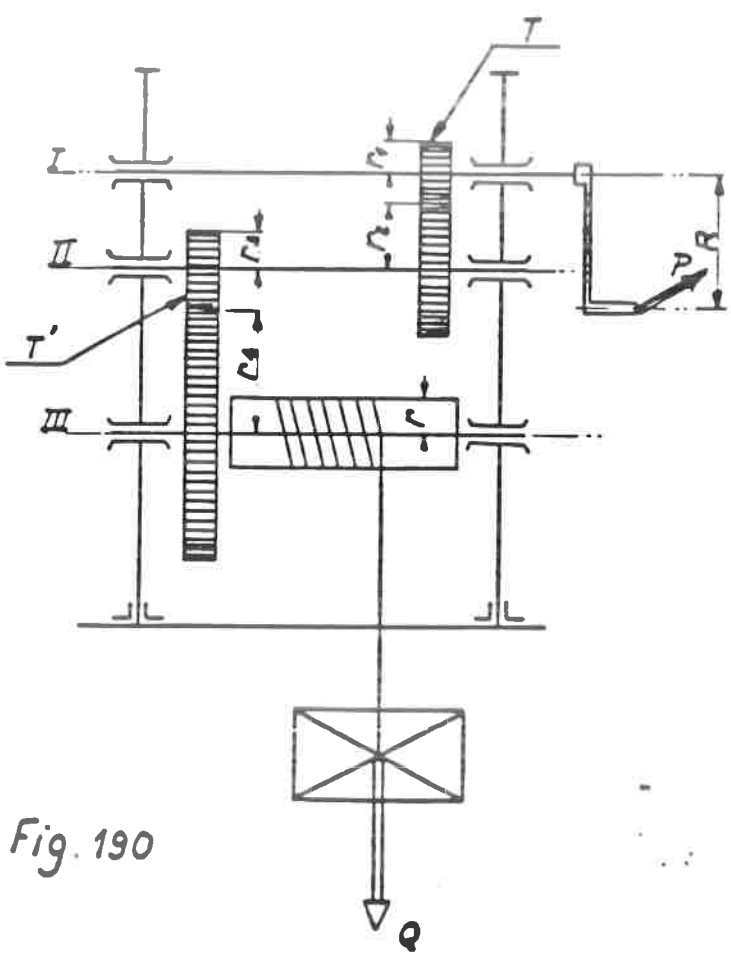


Fig. 190

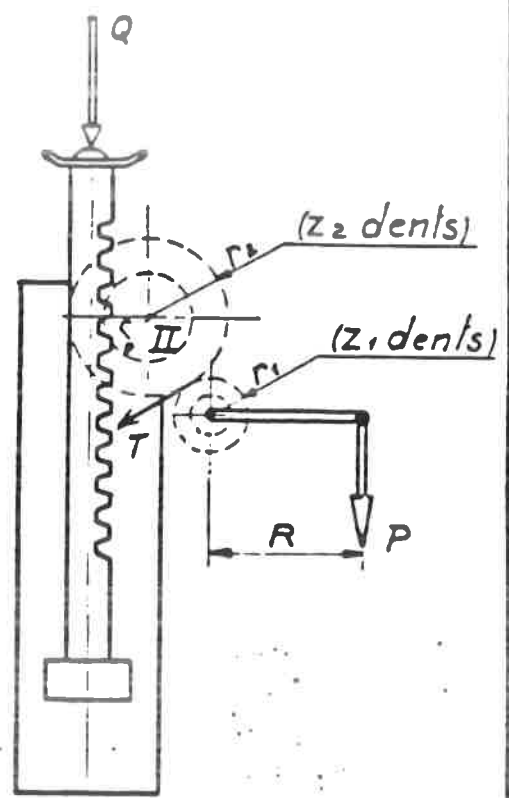


Fig. 192

Chapitre 7. - LES MACHINES SIMPLES (suite).

7.3.4. - Le plan incliné, la vis et le vérin, le coin.

7.3.4.1. - Le plan incliné.

1. Définition.

Le plan incliné est un plan qui forme un angle aigu avec un plan horizontal.

Il est utilisé pour monter ou descendre des charges.

Son emploi réduit l'effort moteur. Cette réduction de l'effort moteur découle d'une augmentation du chemin parcouru.

On remplace, en effet, le chemin vertical à parcourir par un chemin oblique plus long que le premier.

Le plan incliné n'est donc pas une machine au sens propre du mot.

Il s'agit ici, en effet, d'un dispositif statique.

La figure 193 représente un plan incliné ABEF et ABCD un plan horizontal.

Soit le point H sur le plan incliné.

La verticale abaissée de H rencontre le plan horizontal ABCD en un point J. HJ est la hauteur h du plan.

De H, traçons la perpendiculaire à AB, intersection des deux plans. EG est la longueur l du plan.

Joignons JG; JG est la projection de HG sur le plan horizontal.

JG est appelée base du plan incliné.

Appelons c l'angle que forment HG et GJ.

L'angle c est l'angle ou l'angle d'inclinaison du plan.

2. Convention.

Pour représenter un plan incliné, on trace le triangle rectangle GEJ.

Le rapport $\frac{h}{l}$ est la pente du plan incliné.

Dans le triangle rectangle GEJ (fig. 194), nous avons :

$$JH = JG \times \text{tg } c$$

$$\text{tg } c = \frac{JH}{JG} = \frac{h}{l}$$

3. Remarque.

L'inclinaison d'un plan est exprimée par un angle c. La mesure de cet angle se fait en degrés (d'angle).

La relation précédente nous permet de trouver la pente d'un plan par le rapport de deux longueurs : h et l.

4. Applications.

a) Trouver l'angle d'inclinaison et la pente par mètre d'un plan de 15 m. de hauteur (h) et 200 m. de base (b).

Solution : $\text{tg } c = \frac{h}{b} = \frac{15}{200} = 0,075$

La table des tg donne $c = 4^{\circ}20'$

La pente par mètre vaut 0,075 m:m ou 75 mm:m.

b) Trouver la pente par mètre d'un plan incliné à 20° .

Solution : La pente vaut la tangente de 20° . La table des tg indique $\text{tg } 20^{\circ} = 0,364$. - La pente du plan = 0,364 m ou 364 mm:m.

5. Condition d'équilibre d'un corps placé sur un plan incliné. Le frottement du corps sur le plan est supposé nul.

1er cas. La force d'équilibre M est parallèle au plan.

Démonstration.

Soit le plan incliné ABC sur lequel repose un corps de masse P. Cette masse peut être considéré comme une force appliquée au centre de gravité G (fig. 195).

Le frottement entre le corps et le plan est supposé nul, ce qui est le cas pour deux surfaces en contact et idéalement polies.

La masse P du corps peut se décomposer en deux forces, l'une N perpendiculaire au plan, l'autre Q parallèle à l'inclinaison du plan.

Le corps tend à glisser sur le plan sous l'action de la force Q.

La force N est équilibrée par la réaction N' du plan.

Pour maintenir le corps en équilibre, il faut appliquer en G une force M de même direction et de sens opposé à Q. Nous connaissons le point d'application, la direction et le sens de la force M; il reste à déterminer son intensité.

Recherchons l'intensité de M en fonction de ce que nous connaissons.

L'intensité de M = l'intensité de Q. L'intensité de Q = GE.

Les triangles rectangles ABC et EGF sont semblables; nous aurons donc :

$$\frac{GE}{GF} = \frac{AB}{BC}$$

$$GE = \frac{AB \times GF}{BC} \quad (1)$$

Or, $GE =$ intensité de Q ou de M
 $GF =$ poids du corps $= P$
 $AB =$ hauteur du plan $= h$
 $BC =$ longueur du plan $= l$

La relation (1) s'écrira donc :

$$\text{Intensité de } M = P \times \frac{h}{l}$$

Action: Si les résistances de frottement E sont nulles, la valeur de la force d'équilibre parallèle au plan vaut le produit de la charge P de la charge et du rapport de la hauteur du plan à sa longueur.

Remarque: Si le plan est déterminé par son angle d'inclinaison c , nous trouverons la valeur de Q et de M par une relation trigonométrique :

Dans le triangle rectangle GEF (angle droit GEF), nous avons :

$$GE = GF \times \sin c \quad (2)$$

Or, $GE = Q$ et $GF = P$

D'où : $M = P \times \sin c$.

2e cas. La force d'équilibre M est horizontale : fig. 196.

L'effort M peut se décomposer en deux forces :

M'_2 , normale au plan; M'_2 est équilibrée par la réaction du plan et s'ajoute à la composante M de P .

M_1 , parallèle au plan. La force M_1 doit être égale et opposée à Q .

Recherchons la valeur de M en fonction de M_1 .

Dans le triangle rectangle GST :

$$GS = GT \times \cos c$$

$$GT = \frac{GS}{\cos c}$$

Or, $GS = GE$ et $GT = \frac{GE}{\cos c}$. La relation (2) du 1er cas est toujours vraie.

En remplaçant GE par sa valeur (2), nous obtenons :

$$GT = \frac{GP \times \sin c}{\cos c}$$

$$\text{ou } GT = GP \times \frac{\sin c}{\cos c} = GP \times \operatorname{tg} c$$

$$\text{d'où : } \boxed{M = P \times \operatorname{tg} c} \quad (3)$$

$$\text{Dans le triangle } ABC \rightarrow \operatorname{tg} c = \frac{AB}{AC} = \frac{h}{b}$$

$$\text{Dès lors, (3) devient : } \boxed{\text{force } M = P \times \frac{h}{b}}$$

Notion : Si les résistances au frottement sont nulles, la force d'équilibre horizontale vaut le produit de la masse P de la charge et du rapport de la hauteur du plan à sa base.

6. Condition d'équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné.

Il y a frottement du corps sur le plan.

1er cas: La force d'équilibre est parallèle au plan incliné.

a) Mouvement de descente.

Etudions les conditions d'équilibre du corps sur un plan d'angle quelconque c . (fig.197).

Le corps est soumis à une force, sa masse P . Les forces Q et N sont les composantes de P (voir paragraphe 7.3.3.1).

Nous avons vu que :

La force Q parallèle au plan faisait descendre le corps sur le plan dans le cas où le frottement était nul.

La force N normale était équilibrée par la réaction du plan.

Pratiquement, les surfaces présentent toujours des rugosités qui créent des résistances au glissement.

Ces résistances de glissement sont dues à la composante N . Il en résulte une force de frottement F qui s'oppose au mouvement du corps vers le bas (fig.198).

A la 2^e leçon, nous avons vu que $\frac{F}{N} = \operatorname{tg} a = f$ (coefficient de frottement) et $F = N \times \operatorname{tg} a$.

Cette relation est vérifiée dans le triangle rectangle IEG où :

$$EI = GE \times \operatorname{tg} \widehat{EGI}.$$

Or, $EI = GK = \text{force } P$ (par construction)
et $GH = \text{force } N$

$$\text{d'où : } P = N \times \operatorname{tg} \widehat{EGI}$$

Et, $\widehat{EGI} = \text{angle } a$ (angle de frottement)

$$P = N \times \operatorname{tg} a = N \times f. \quad (1)$$

Dans le triangle rectangle GED :

$$DH = GH \times \operatorname{tg} c$$

$$DH = EG = \text{force } Q$$

$$\text{et } GH = \text{force } N$$

$$\text{d'où } Q = N \times \operatorname{tg} c \quad (2) \quad \text{Nous savons que } \operatorname{tg} c = \frac{h}{b}$$

(par.7.3.3.1)

Conclusions :

- | | |
|---|--|
| { | <p>1. - Si f ou $\operatorname{tg} a > \operatorname{tg} c \longrightarrow P > Q$ (sens opposés)</p> <p><u>Le corps ne se mettra pas en mouvement sur le plan.</u></p> |
| { | <p>2. - Si f ou $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \longrightarrow P = Q$ (sens opposé)</p> <p><u>Le corps ne se mettra pas en mouvement sur le plan.</u></p> |
| { | <p>3. - Si f ou $\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} c \longrightarrow P < Q$ (sens opposés)</p> <p><u>Le corps descendra sur le plan incliné.</u></p> |

b) Mouvement de montée (fig. 199).

Quand le frottement était inexistant (par.7.3.3.1.3), nous avons vu que pour le corps soit en équilibre sur le plan, une force extérieure M opposée à Q doit être appliquée.

Comme nous supposons que le frottement existe, la force de frottement F s'exercera en sens opposé à la montée du corps. Le sens de la force F sera donc le même que celui de Q . Les forces Q et F s'ajoutent et s'opposent toutes deux à la montée du corps.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut appliquer en G un effort M valant :

$$M = Q + P.$$

2e cas : La force d'équilibre est horizontale.

Nous avons représenté à la figure 200 que l'effort $M' = Q + P$. Cette force s'oppose au mouvement de montée

6.

du corps sur le plan.

L'effort M'_1 peut se décomposer en 2 forces : M'_2 et M'_1 .

La force M'_2 , normale au plan K , est équilibrée par une réaction du plan.

La force M'_1 est horizontale.

Pour équilibrer M'_1 , il suffit d'appliquer un effort horizontal P'_1 .

Notons que : $M'_1 = M'_1 \times \cos c$

$$\text{et } \frac{M'_1}{1} = \frac{M'_1}{\cos c}$$

$$\text{Or, } M'_1 = P'_1$$

$$\text{D'où, l'effort } P'_1 = \frac{M'_1}{\cos c}$$

$$\text{Or, } M'_1 = Q + F$$

$$\text{Dès lors, } P'_1 = \frac{Q + F}{\cos c}$$

d'une masse

7. Application : Un bloc de pierre V de 15 tonnes doit être élevé sur une rampe de 510 mm. par m. La vitesse de montée est imposée; elle vaut 0,020 m:s. Les conditions de frottement sont telles que le coefficient de frottement $f = 0,40$.

Calculez : 1° L'effort total à appliquer au câble de halage;

2° La puissance du moteur du treuil de halage en tenant compte d'un rendement global de cet appareil de 60 %.

Données : Masse $P = 15\ 000\ N$

$$\text{Pente } p = \frac{h}{b} = 0,50\ \text{m. par m.}$$

$$v = 0,020\ \text{m:s}$$

$$f = 0,40$$

$$\text{rendement global du treuil} = 0,60$$

Formules : Nous devons rechercher l'effort M nécessaire à l'ascension du bloc (fig. 199).

Nous savons que : $M = Q + F$

1° Recherche de Q. $Q = P \times \sin c$

$$\text{Or : } \text{tg } c = \frac{h}{b}$$

L'angle c pourra être déterminé par une lecture à la table des tangentes.

On pourra donc trouver la valeur du $\sin c$ à la table des sinus :

$$Q = P \times \sin c. \quad (1)$$

2° Recherche de F

$$F = N \times f$$

$$\text{Or, } N = P \times \cos c$$

$$\text{d'où } F = P \times \cos c \times f \quad (2)$$

$$3° \quad M = Q + F \quad (3)$$

4° Puissance théorique du treuil : $P = F \times v$

$$\text{d'où } P_{th} = M \times v$$

5° Puissance effective : $P_e = \frac{P_{th}}{r}$

Applications numériques.

$$1. \quad \text{tg } c = 0,51 \quad - \quad \text{angle } c = 27^\circ$$

$$Q = 15\,000 \times \sin 27^\circ = 15\,000 \times 0,453 = 67\,900 \text{ N}$$

$$2. \quad F = P \times \cos 27^\circ \times 0,40 = 15\,000 \times 0,891 \times 0,40 = 53\,460 \text{ N}$$

$$3. \quad M = Q + F = 67\,900 \text{ N} + 53\,460 = 121\,360 \text{ N}$$

$$4. \quad P_{th} = M \times v = 121\,360 \times 0,020 = 2\,427,2 \text{ N m/sec}$$

$$5. \quad P_e = \frac{2\,427,2}{0,60} = 4\,045,3 \text{ N.m/sec} = 4\,045,3 \text{ Watts}$$

7.3.4.2. - La vis.

1. Définition.

La vis est une application du plan incliné.

La construction de la vis a été exposée dans la lère partie (cinématique).

Nous avons vu que le développement de la surface extérieure d'une vis sur la hauteur d'un filet donnait un rectangle ABCD (fig. 201). La diagonale de ce rectangle enroulé se superpose à la spire du filet.

e.

L'écrou dont les filets s'emboîtent dans ceux de la vis peut être considéré comme un corps qui repose sur un plan incliné.

2. Condition d'équilibre.

1er cas : Le frottement (vis dans écrou) est supposé nul.

La condition d'équilibre de la vis est identique à celle d'un corps posé sur un plan incliné (par. 7.3.3.1.3-2e cas).

La pente de ce plan est donnée par la relation :

$$\text{Pente } \operatorname{tg} c = \frac{h}{b} = \frac{p}{\pi x D}$$

Soit la charge Q supportée par l'écrou en un point A (fig. 201).

L'effort Q se décompose en 2 composantes N et M .

La charge Q est l'effort à vaincre; c'est l'effort résistant.

Pour établir l'équilibre par un effort horizontal, il faut appliquer une force P . Cette force P sera appliquée à la circonférence de la vis.

La force P est appelée effort moteur.

$$P = Q \times \frac{h}{b}$$

$$\text{et } P = Q \times \frac{p}{\pi x D}$$

$$\text{ou encore: } P = Q \times \frac{p}{2 \pi R}$$

2e cas : Le frottement de la vis dans l'écrou existe.

La relation précédente devient :

$$P = Q \times \frac{p}{2 \pi x R} + F$$

F est la force additionnelle résultant du frottement de la vis dans l'écrou.

3. Réversibilité. - Irréversibilité de l'écrou.

On dit qu'une vis est réversible quand elle se met en mouvement sous l'action d'un effort quelconque agissant suivant son axe.

1er cas : Dans le cas du frottement nul, la réversibilité est toujours assurée. En effet, aucune force ne s'oppose à la descente de A sur le plan incliné AC (fig. 201).

2e cas : Dans le cas où il y a frottement, f est le coefficient de frottement.
La force de frottement s'oppose au déplacement du corps.

Les conditions ci-dessous ont été étudiées dans l'exposé relatif au plan incliné (§7.3.3.1.4).

1° Si $f < \operatorname{tg} c = \frac{D}{2R}$, \longrightarrow $F < Q$ (sens opposé)

2° Si $f = \operatorname{tg} c = \frac{D}{2R}$, \longrightarrow $F = Q$ (égale et de sens opposé)

3° Si $f > \operatorname{tg} c = \frac{D}{2R}$, \longrightarrow $F > Q$ (sens opposé).

Conclusions : 1. Dans les cas 1 et 2 ci-dessus, il n'y a pas de déplacement de A; la vis est irréversible.

2. Dans le cas 3, il y a déplacement de A et la vis est réversible.

+ + +

7.3.4.3. Le vérin.

1. Définition.

Le vérin est une des applications de la vis.

Il est utilisé pour soulever des charges. Son utilisation est analogue à celle des crics.

En général, le rapport entre l'effort moteur et l'effort résistant (charge à soulever) du vérin est plus grand que le même rapport des crics.

Cette considération permet l'utilisation du vérin au soulèvement de charges importantes.

La figure 202 donne une disposition du vérin.

La vis mobile v tourne dans l'écrou ou fût e .

La charge à lever Q se place en A.

La vis v est manoeuvrée par un levier m . L'effort moteur manuel P' est appliqué au bout de ce levier m .

2. Condition d'équilibre.

Dans le cas où le frottement est nul :

$$T_M = T_Q$$

Pour un tour de manivelle, le chemin parcouru par P' vaut le travail de l'effort moteur ou :

$$T_M = P' \times 2\pi \times l.$$

10.

Pendant le déplacement de P' , la charge Q est levée d'une hauteur égale au pas p .

Le travail de l'effort résistant Q ou $T_Q = Q \times p$.

$$Q \times p = P' \times 2 \pi \times l$$

$$P = \frac{Q \times p}{2 \pi \times l}$$

Conclusion:

L'effort à exercer pour soulever une charge Q , au moyen d'un vérin, vaut le produit de Q par le rapport du pas de la vis à la longueur de la circonférence décrite par la manivelle.

En tenant compte de la force de frottement F :

$$P = \frac{Q \times p}{2 \pi \times l} + F$$

3. Rendement.

Nous savons que $k = \frac{T_{\text{moteur}} - T_{\text{résistances passives}}}{T_{\text{moteur}}}$

$$= \frac{T_{\text{utile}}}{T_{\text{moteur}}}$$

$$\text{d'où : } k = \frac{T_Q - T_P}{T_Q}$$

$$\text{et } k = \frac{T_Q}{T_P}$$

Le rendement des vérins et des systèmes à vis en général varie de 0,5 à 0,7.

+ + +

7.3.4.4. - Le coin.

1. Définition:

Le coin est une pièce en acier ou en bois dur, en forme de prisme à base triangulaire.

La base peut être un triangle isocèle (ou simplement à trois angles aigus). Dans ce cas, le coin est double (fig. 203).

Applications. Fente du bois. Les outils de coupe à main ou de machines-outils (hache, burins...); voir figures 205 et 206.

Si la base est un triangle rectangle, le coin est simple (fig. 204).

Applications : Les clavettes et coins de rappel (fig. 207).

2. Condition d'équilibre du coin.

- a) Le frottement est nul. Soit un coin de section isocèle à l'encre des pièces de bois (fig. 208).
Soit l'effort moteur P .
Celui-ci peut se décomposer en des efforts perpendiculaires Q_1 et Q_2 aux faces d'appui du coin.

Les réactions des faces de la pièce équilibrent les forces Q_1 et Q_2 . Ces réactions sont constituées par les tensions internes du bois.

Ces efforts Q_1 et Q_2 peuvent être déterminés graphiquement par le tracé du parallélogramme des forces.

On peut aussi rechercher la valeur de ces efforts géométriquement.

Les triangles ABC et DED sont semblables (angles égaux chacun à chacun).

$$\text{On a : } \frac{DE}{AC} = \frac{DO}{AB}$$

$$\text{Or : } \begin{array}{l} DE = Q_1, \\ AC = l, \end{array} \quad \begin{array}{l} DO = P \\ AB = b \end{array}$$

$$\text{Dès lors : } \frac{Q_1}{l} = \frac{P}{b}$$

et

$$\boxed{\frac{Q_1}{P} = \frac{l}{b}}$$

$$\text{d'où : } \boxed{Q_1 = P \times \frac{l}{b}} \quad \text{ou} \quad P = Q_1 \times \frac{b}{l}$$

Notion.

Pour une même force P , la force Q_1 est proportionnelle au rapport $\frac{l}{b}$.

Ce rapport est d'autant plus grand que b est plus petit.

Il y a donc intérêt à utiliser un coin effilé. Observez les angles de coupe des outils; ils sont aussi faibles que le permet la limite de résistance.

- b) Le frottement du coin dans la pièce existe.

La force P peut être décomposée en deux forces T_1 et T_2 (fig. 209). Ces forces forment un angle α avec la perpendiculaire à la face d'appui du coin.

" α " est l'angle de frottement.

Les efforts T_1 et T_2 , déplacés suivant leur ligne d'action et appliqués à la face d'appui du coin, peuvent se décomposer en deux forces :

12.

L'une, Q, agit normalement à la face ^{appliquée} du coin et produit un effet utile. Les réactions de la pièce équilibrent cet effort.

L'autre, P, est l'équilibrante de la force de frottement F'.
En résumé, voici la condition d'équilibre :

Il faut que la force motrice P et les réactions T' et T' (fig. 210) égales et opposées à T₁ et T₂ aient une résultante nulle.

3. Réversibilité du coin.

Supposons un coin enfoncé dans une pièce de bois. (fig 210)
L'effort moteur P n'est pas appliqué; le coin reste enfoncé.
Pourquoi ? La réaction T₁ se décompose en une force normale

Q' et une force F'. La force F' tend à faire remonter le coin.

De la composante normale Q' résulte une force de frottement : $N = f \times Q'$.

Quand : $N = f \times Q' < F'$, le coin remonte.

$N = f \times Q' = F'$,
 $N = f \times Q' > F'$, } le coin est en équilibre.

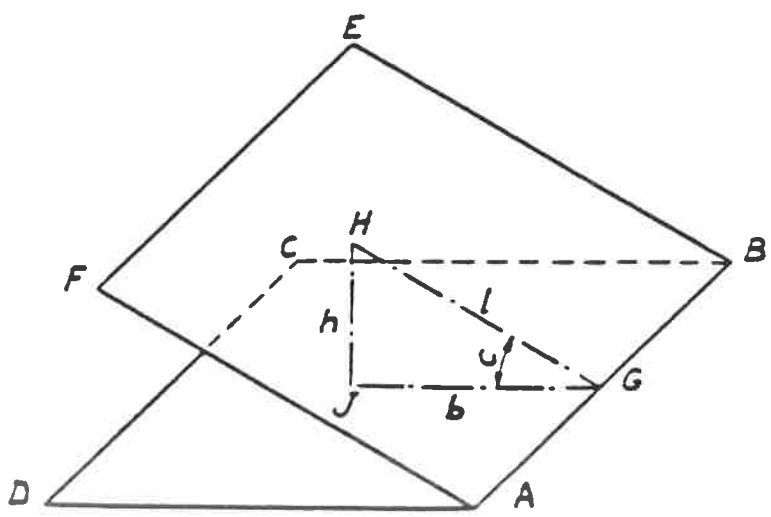


Fig. 193

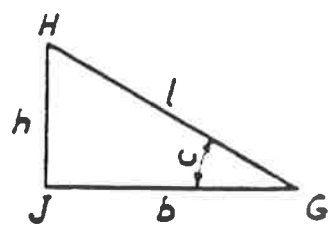


Fig. 194

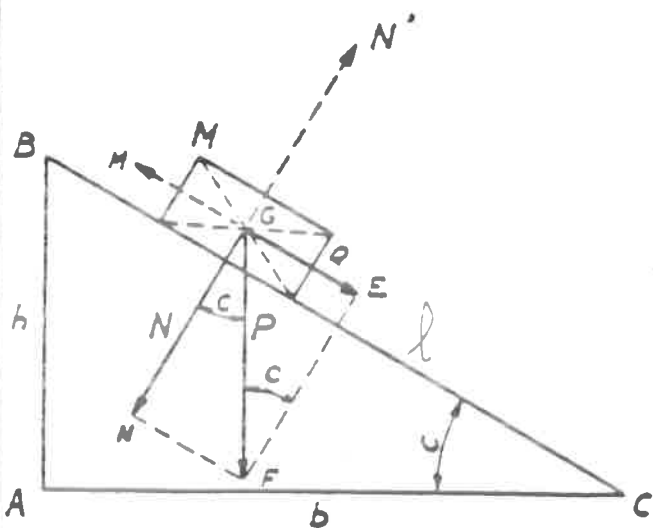


Fig. 195

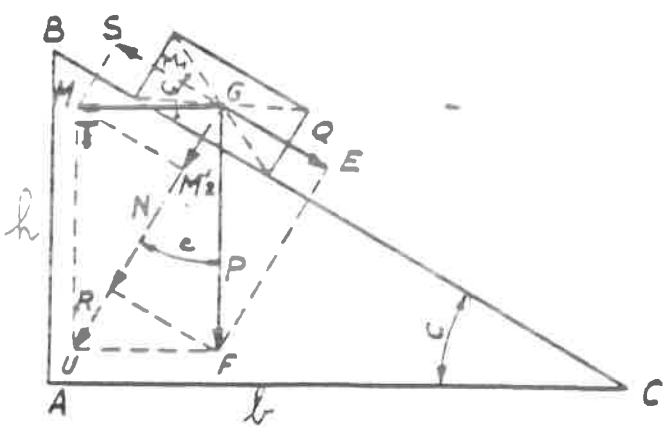


Fig. 196

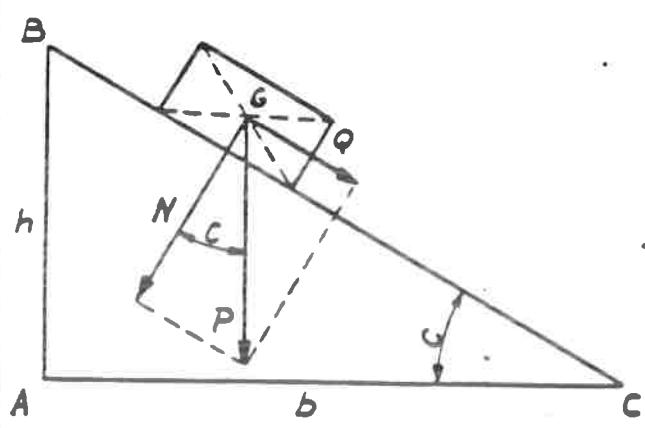


Fig. 197

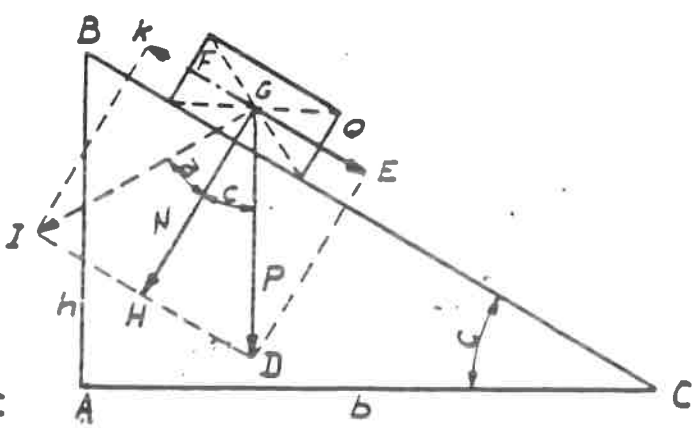


Fig. 198

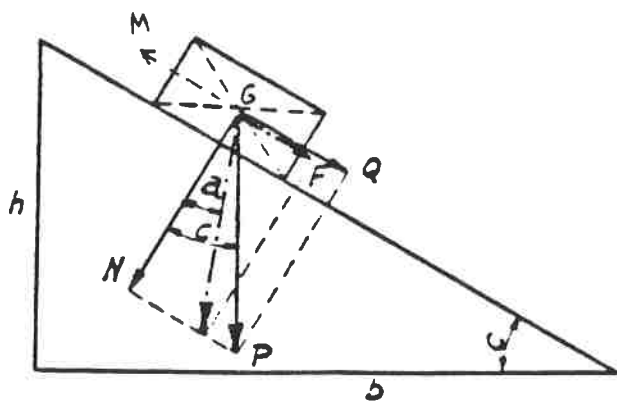


Fig. 199

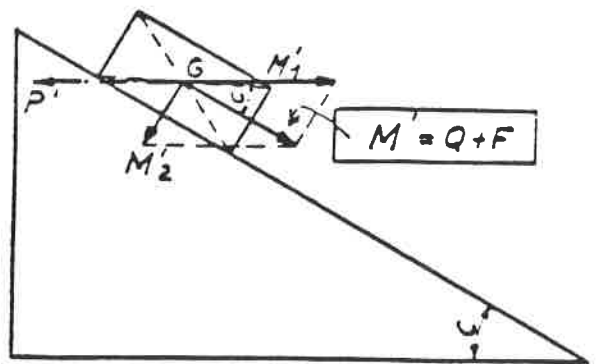


Fig. 200

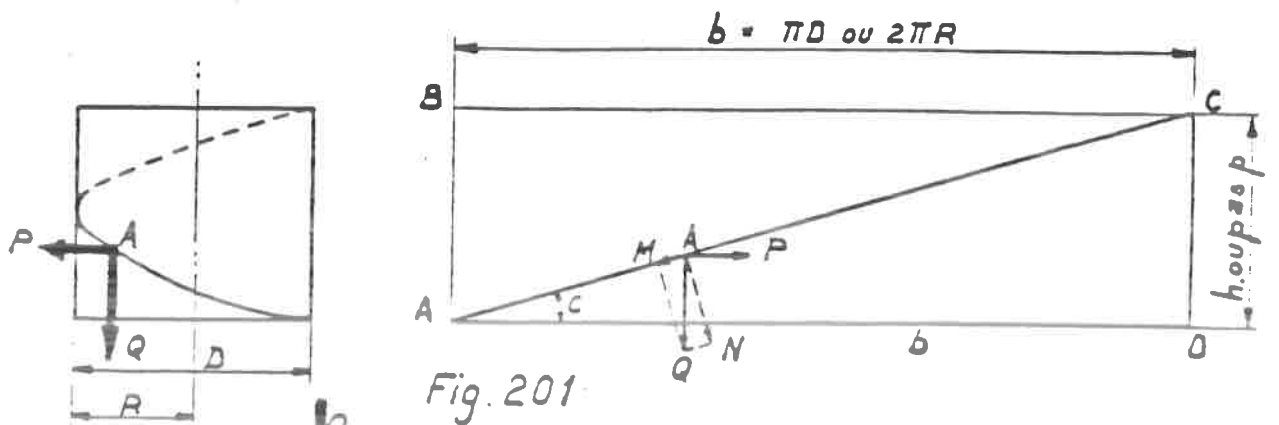


Fig. 201

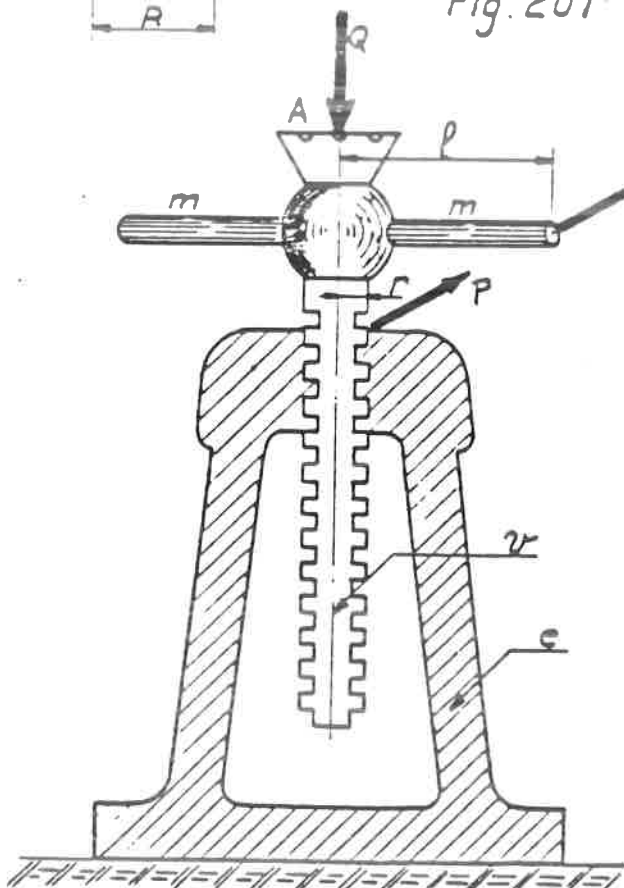


Fig. 202

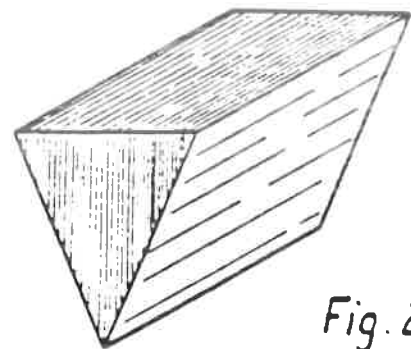


Fig. 203

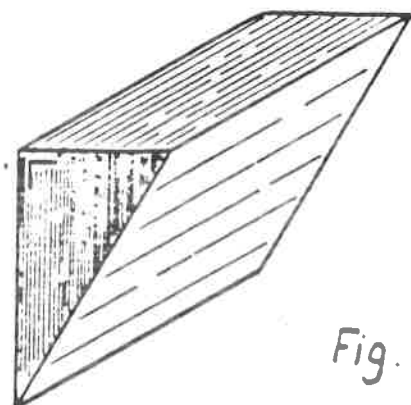


Fig. 204

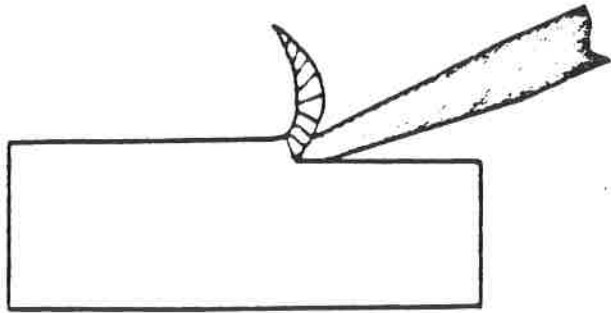


Fig. 205

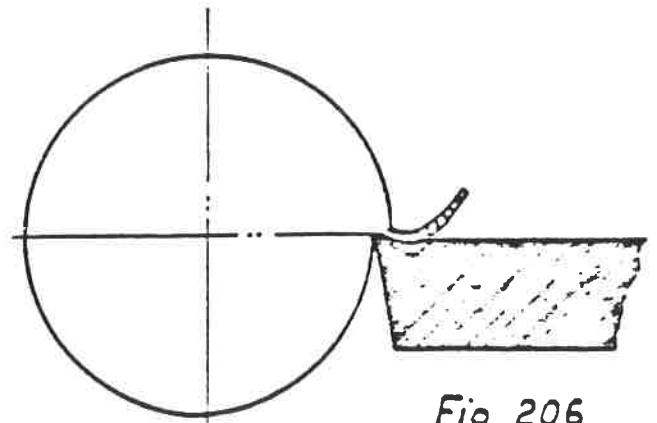


Fig. 206

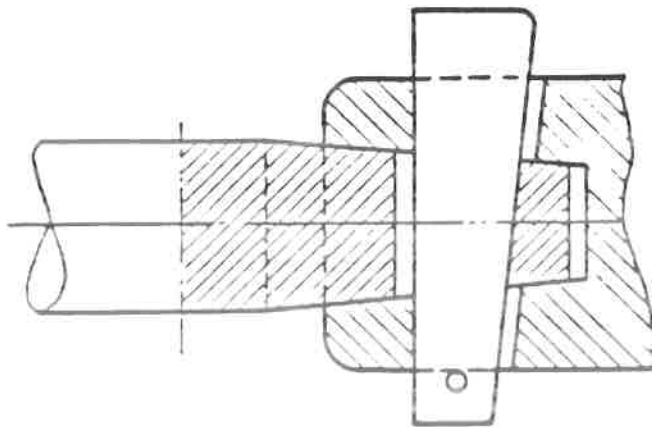
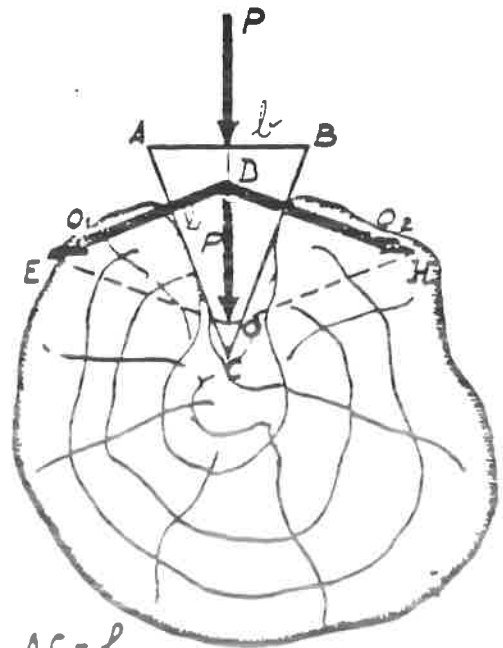


Fig. 207



$$AC = l$$

$$AB = l$$

Fig. 208

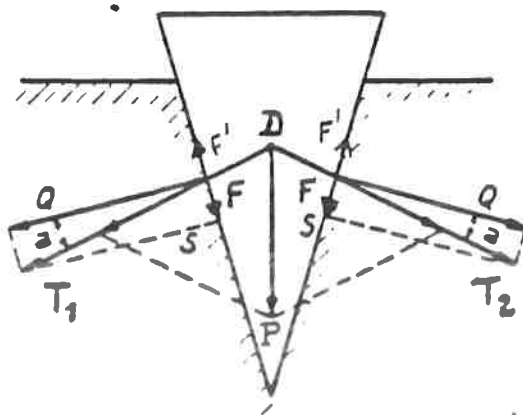


Fig. 209

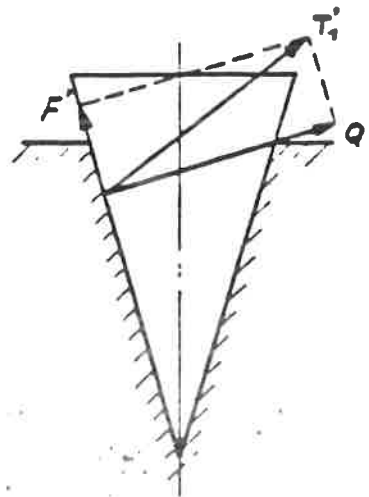


Fig. 210

